Programa. Curso 2024/2025

Fundamentos de Mecánica Computacional

PROGRAMA:

1. **INTRODUCCIÓN**
   Mecánica Computacional: definición conceptual; interés para la Ingeniería. Campos en Medios Continuos: movimiento del medio; tensor gradiente de movimientos; descripciones lagrangiana y euleriana; derivadas temporales y espaciales; deformación del continuo; cuestiones de especial interés. Fundamentos de Mecánica Computacional.

2. **INTEGRACIÓN MÚLTIPLE**
   Cálculo de primitivas. Integración. Teorema Fundamental del Cálculo. Integrales iteradas. Integrales dobles y triples. Recolocación de términos. Permutación del orden de integración. Integrales de longitud, área y volumen. Planteamiento práctico de integrales múltiples. Expresión del recinto de integración. Aplicaciones. Cambio de variable. Coordenadas curvilíneas. Cambios en 1D, 2D y 3D. Cambios de especial interés: polares, cilíndricas y esféricas.

3. **ESPACIOS EUCLÍDEOS**
   Espacios de trabajo. Expresión de un vector en una base: cambio de base. Tensor métrico: definición, inversión y cambio de base; Obtención de una base ortonormal; Obtención de las componentes de un vector: componentes contra y covariantes; base dual. Tensores: producto tensorial; cambio de base de los componentes; subida y bajada de índices. Cálculo de la longitud, el área, el volumen y el hipervolumen en función del tensor métrico. Producto vectorial. Transformaciones lineales. Transformaciones geométricas: deformación, inflación, deformación isocórica y rotación. Descomposición polar. Transformaciones geométricas infinitesimales: deformación infinitesimal, inflación infinitesimal, deformación isocórica infinitesimal y rotación infinitesimal. Descomposición polar infinitesimal.

4. CÁLCULO DE VARIACIONES

Motivación: braquistócrona; superficies de área mínima; geodésicas; Problema fundamental. Lemas fundamentales. Ecuación de Euler-Lagrange. Geodésicas en el plano. Integrales primeras de las ecuaciones de Euler-Lagrange: Identidad de Beltrami. Generalización de las ecuaciones de Euler-Lagrange; funciones vectoriales y lagrangianos de orden superior. Problema de la braquistócrona. Superficies de revolución de área mínima. Introducción a la Mecánica Analítica: Principio de Hamilton y ecuaciones del movimiento de Lagrange. Introducción a la Mecánica Computacional: principios variacionales y ecuaciones diferenciales; forma fuerte y forma débil; Teorema de D'alambert y Principio de los Trabajos Virtuales.

5. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS REGULARES

Representación en paramétricas. Longitud de arco. Diferencial de arco. Vector tangente. Reparametrización en función del arco: notación especial; relación entre derivadas. Triedro de Frenet: vectores tangente, normal y binormal; planos osculador, normal y rectificante; curvatura y radio de curvatura. Derivadas de los vectores tangente, normal y binormal; torsión y radio de torsión; interpretación geométrica. Teoría de contacto: recta tangente y plano normal; plano osculador; circunferencia osculatriz; esfera osculatriz. Cálculo de la curvatura y de la torsión: carácter intrínseco. Integración a lo largo de una curva. Aplicaciones: cinemática de la partícula; geodésicas en el plano y en el espacio; otros problemas clásicos (involuta, evoluta y envolvente). Estudio particular de curvas planas.

6. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE SUPERFICIES REGULARES

Representación en paramétricas: líneas coordenadas; vectores coordenados. Área. Diferencial de área. Ángulo entre líneas coordenadas. Vector normal. Notación especial. Recta normal y plano tangente. Curva trazada sobre una superficie: diferencial de arco; 1ª forma cuadrática fundamental; tensor métrico; vector tangente; ángulo entre dos curvas. Curvatura según una dirección: curvatura normal y curvatura geodésica; obtención de la curvatura normal; 2ª forma cuadrática fundamental; sección normal según la tangente; Teorema de Meusnier; obtención de la curvatura geodésica. Interpretación geométrica de la 2.ª forma cuadrática fundamental. Variación de la curvatura con la dirección: direcciones asintóticas; puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos; direcciones principales y curvaturas principales; Teorema de Euler. Curvatura media y curvatura total: cálculo a partir de las curvaturas principales; superficies minimales; Theorema Egregium de Gauss. Integración sobre una superficie. Expresión implícita de una superficie. Expresión explícita de una superficie. Aplicaciones: cinemática de la partícula; geodésicas. Proyección de Mercator.

7. ANÁLISIS TENSORIAL

Coordenadas curvilíneas: vectores naturales; diferencial del vector de posición. Cambio de variable: cambio de base de los componentes de la diferencial del vector de posición. Tensor Métrico: diferencial de arco de una curva; diferencial de hiper-volumen; integración en curvilíneas; cambio de base de los componentes del tensor métrico. Base dual. Componentes tensoriales (contravariantes y covariantes) y componentes físicas de un vector. Símbolos de Christoffel: expresión general; propiedades útiles. Espacios de Riemann. Tensores de orden superior: producto tensorial; expresión de un tensor en una base; cambio de base; operaciones de subida y bajada de índices; Ley de Cocientes. Estado tensional de sólidos y fluidos: tensor de tensiones de Cauchy. Movimientos en un medio continuo: tensor gradiente de movimientos; tensor de deformaciones.

8. TEORÍA DE CAMPOS

Campos en medios continuos Campos (escalares, vectoriales y tensoriales) en coordenadas curvilíneas generales y en coordenadas cartesianas ortonormales. Operadores diferenciales simples (gradiente, divergencia, rotacional) y compuestos (laplaciano). Expresiones de los operadores diferenciales en cartesianas: gradiente de un campo escalar; gradiente de un campo vectorial; divergencia de un campo vectorial; rotacional de un campo vectorial, laplaciano de un campo escalar; laplaciano de un campo vectorial; operadores compuestos idénticamente nulos. Otras expresiones útiles: linealidad de los operadores diferenciales; operadores aplicados a campos compuestos. Campos especialmente importantes: campo irrotacional o conservativo; campo solenoidal; descomposición de Helmholtz; campo armónico; campo central; campo Newtoniano. Teoremas integrales: Teorema de Green; Teorema de Stokes; Teorema de Gauss-Ostrogradski o de la Divergencia; Identidades de Green; Teorema del Gradiente; Teorema del Rotacional. Interpretación integral de los operadores diferenciales. Derivación tensorial: derivadas de los vectores de las bases natural y dual; diferencial, derivada direccional y derivada tensorial o covariante de un campo escalar; diferencial, derivada direccional y derivada tensorial o covariante de un campo vectorial en componentes contravariantes y covariantes). Expresiones de los operadores diferenciales en curvilíneas: naturaleza tensorial de la derivada covariante; tensor gradiente de un campo escalar; tensor gradiente de un campo vectorial; divergencia de un campo vectorial; rotacional de un campo vectorial; laplaciano de un campo escalar.

9. ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE EULER

Mecanismos de transporte: convección y difusión. Ecuación de Conservación de Euler y aplicaciones: ecuaciones de continuidad, transporte de contaminación, calor y carga, conservación del momento lineal (Ecuación de Cauchy-Navier), conservación de la energía. Forma débil. Método de Galerkin.