ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE EULER

F. Navarrina, L. Ramírez & GMNI

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fermin.navarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

Índice (I)

Convección y Difusión (I)

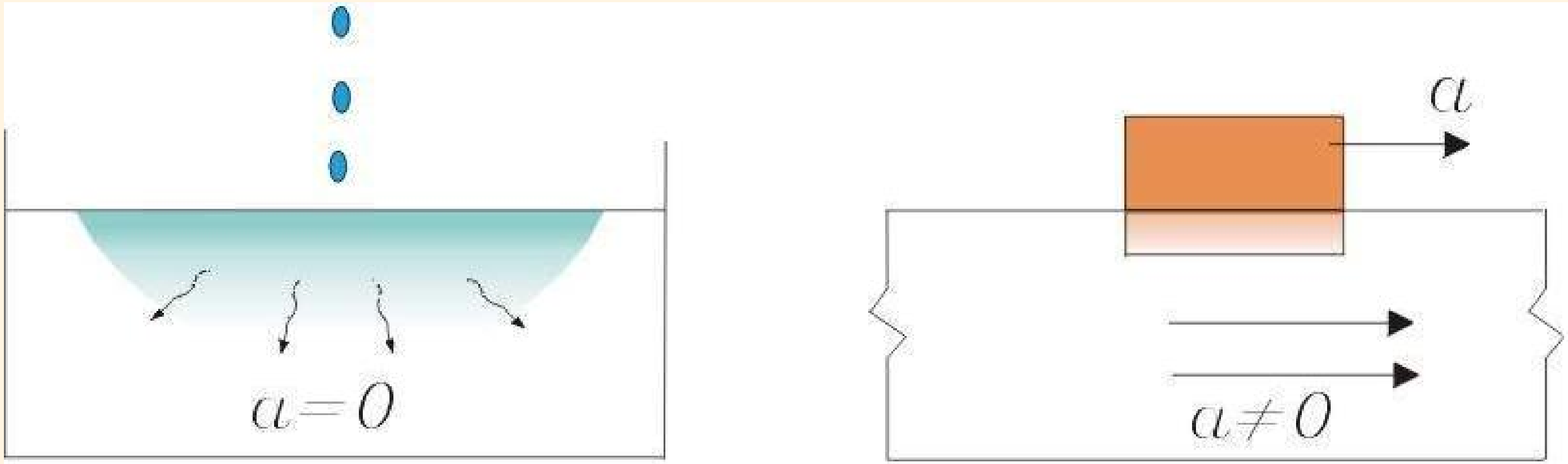
- El concepto de **CONVECCIÓN-DIFUSIÓN** se asocia normalmente con un **PROCESO DE TRANSPORTE** (de masa, calor, carga, etc.) en el seno de un **MEDIO FLUIDO EN MOVIMIENTO**, como:
  - la dispersión del vertido de un contaminante en el mar, en un río o en la atmósfera,
  - la transferencia de calor o masa en ingeniería térmica o química,
  - . . .

Imágenes por cortesía de National Geographic

Convección y Difusión (II)

▶ El nombre se debe a los dos mecanismos de transporte involucrados:

- **DIFUSIÓN**, y
- **CONVECCIÓN** (también llamada **advección**).



Mecanismos de difusión (izquierda) y convección (derecha).

► Pero en realidad se trata de un concepto mucho más amplio,

- **EXTRAORDINARIAMENTE SIGNIFICANTE**, y
- **ASOMBROSAMENTE UBICUO**,

que emerge de la propia esencia de

LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE EULER .

TEQUILA SUNRISE

- ♡ Mezclar TEQUILA y ZUMO DE NARANJA (*) en un vaso con hielo.
- ♡ Añadir GRANADINA (**) suavemente.
- ♡ Adornar la copa con una rodaja de naranja y una guinda.

(*) EL medio continuo.
(**) La magnitud física que se pretende modelar $\mathscr{C}$.

DIFUSIÓN

Tequila Sunrise. Por cortesía de <http://www.sapphirepos.com>

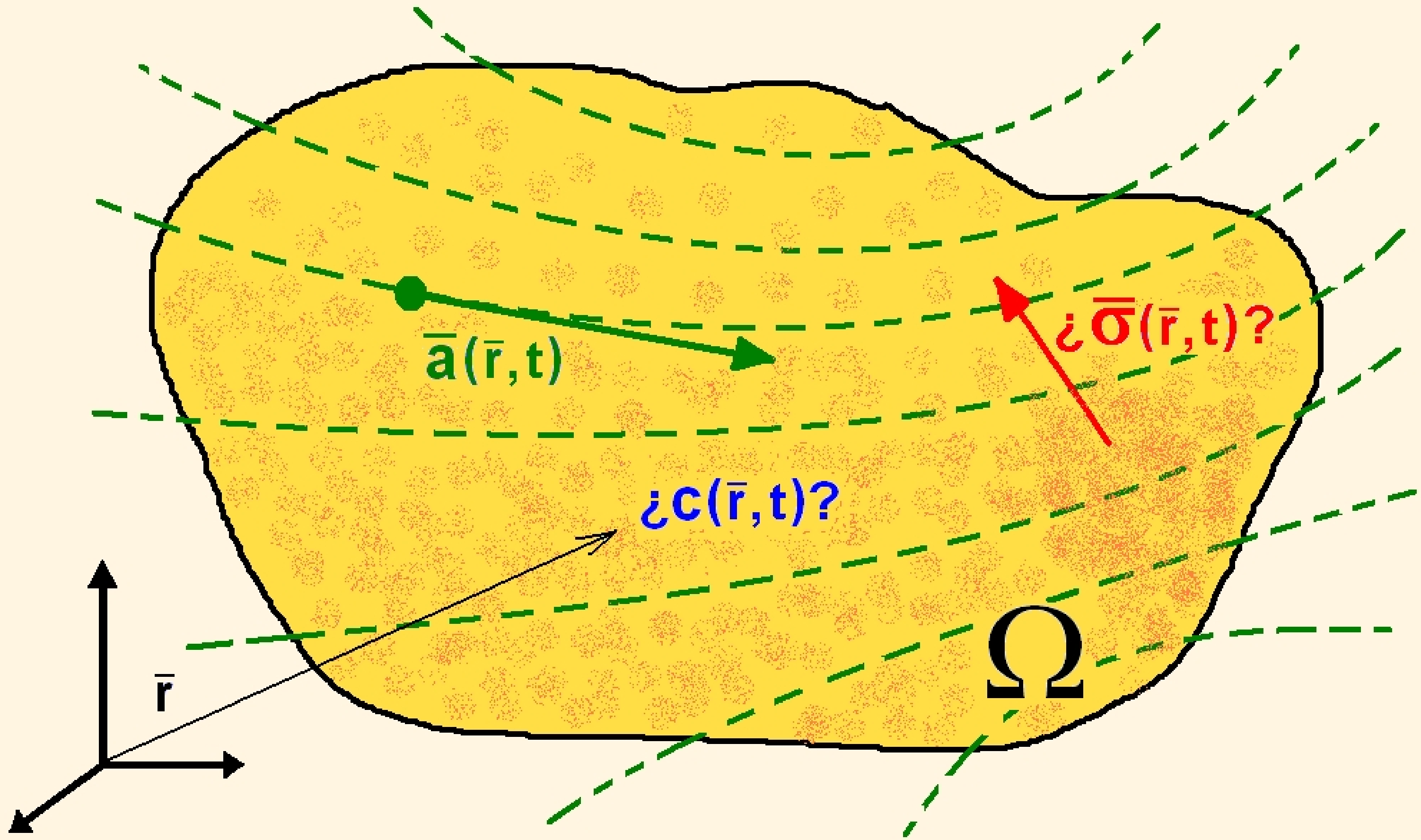
CONVECCIÓN

Cómo agitar un cocktail adecuadamente. Por cortesía de <http://www.parasaber.com>

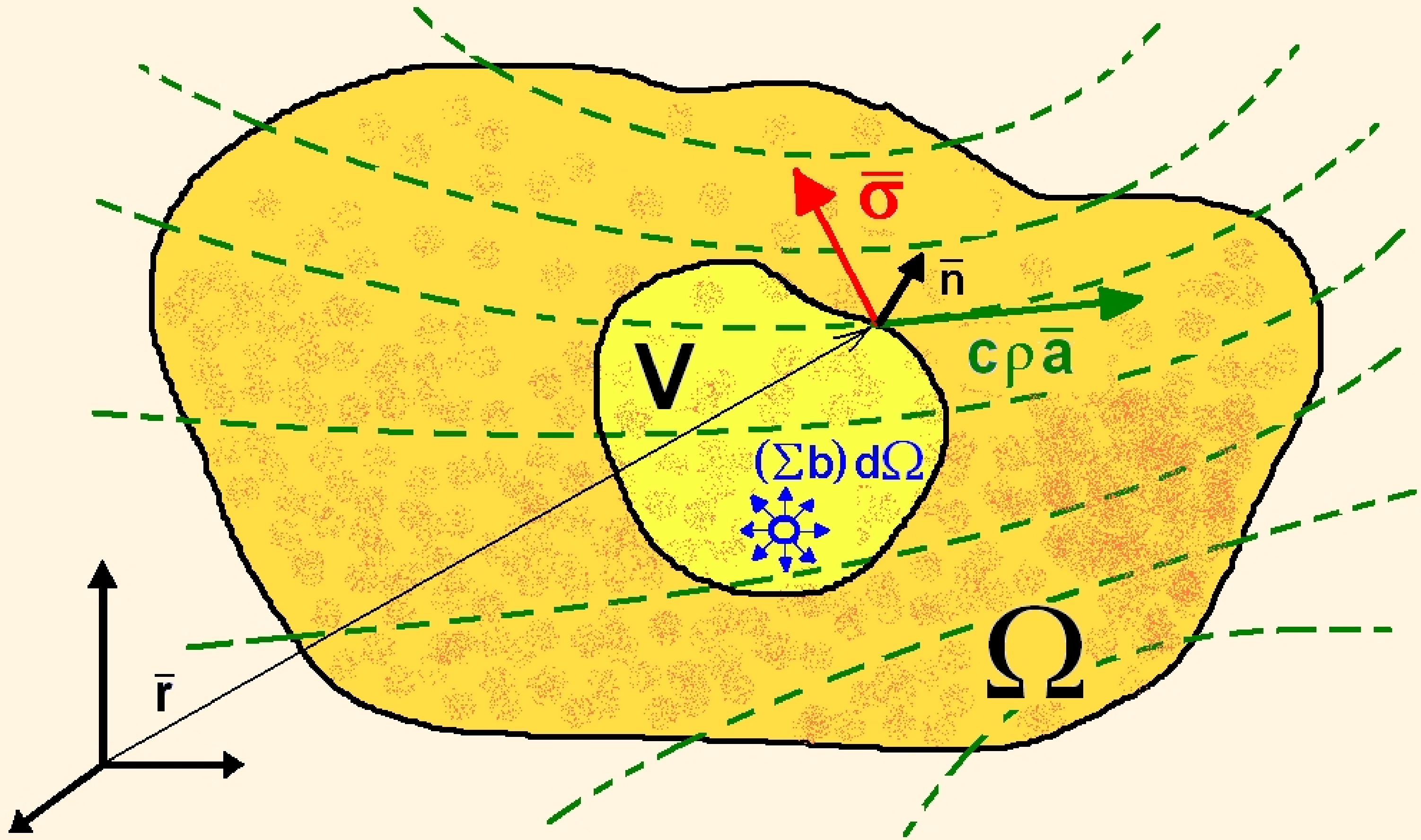
EQUILIBRIO

Diamond Old Fashioned. Por cortesía de <http://sapphirepos.com>

Transporte por CONVECCIÓN-DIFUSIÓN de una magnitud física ($\mathscr{C}$)



Balance de la magnitud $\mathscr{C}$ en el subdominio $V \subset \Omega$:



donde:

$$
\begin{array}{ll}
\mathscr{C} & = \text{magnitud física cuyo balance se establece,} \\
V \subset \Omega & = \text{subdominio arbitrario,} \\
\partial V & = \text{contorno de } V\text{,} \\
\bar{\boldsymbol{n}} & = \text{normal exterior a } \partial V\text{,} \\
\bar{\boldsymbol{r}} \in \Omega & = \text{coordenadas espaciales de un punto arbitrario,} \\
t & = \text{tiempo,} \\
c(\bar{\boldsymbol{r}}, t) & = \text{CONCENTRACIÓN de } \mathscr{C} \text{ (variable principal),} \\
\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{r}}, t) & = \text{FLUJO DIFUSIVO de } \mathscr{C} \text{ (variable secundaria),} \\
\bar{\boldsymbol{a}}(\bar{\boldsymbol{r}}, t) & = \text{velocidad del medio,} \\
\rho(\bar{\boldsymbol{r}}, t) & = \text{densidad del medio,} \\
\varphi(\bar{\boldsymbol{r}}, t) & = \text{fuente de masa,} \\
b(\bar{\boldsymbol{r}}, t) & = \text{fuente de la magnitud física } \mathscr{C}\text{ ,} \\
\zeta(\bar{\boldsymbol{r}}, t) & = \text{concentración de } \mathscr{C} \text{ en la fuente de masa.}
\end{array}
$$

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Integral)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_V \left(c\rho\right)\, d\Omega\right] = \longrightarrow \text{(variación de } \mathscr{C} \text{ en el subdominio)}$$

$$\iiint_V \left(b + \zeta\varphi\right)\, d\Omega \longrightarrow \text{(contribución de las fuentes)}$$

$$-\iint_{\partial V} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho\ \bar{\boldsymbol{a}}\right)^T \bar{\boldsymbol{n}}\ d\Gamma \longrightarrow \text{(pérdidas a través del contorno)}$$

$$\forall V \subset \Omega,\ \forall t.$$

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Integral)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_V \left(\boxed{c\rho}\right)\, d\Omega\right] = \longrightarrow$$ (variación de $\mathscr{C}$ en el subdominio)

$$\iiint_V \left(\boxed{b+\zeta\varphi}\right)\, d\Omega \longrightarrow$$ (contribución de las fuentes)

$$-\iint_{\partial V} \left(\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \boxed{c\rho}\;\boxed{\bar{\boldsymbol{a}}}\right)^T \bar{\boldsymbol{n}}\; d\Gamma \longrightarrow$$ (pérdidas a través del contorno)

$$\forall V \subset \Omega,\ \forall t.$$

Puesto que V no depende de t,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\iiint_V (c\rho)\, d\Omega\right] = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(c\rho)\right] d\Omega,$$

Ecuación de Conservación de Euler (IIIb)

. . . y por tanto

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\Big(c\rho \Big)\, d\Omega \quad = \qquad \longrightarrow \quad \text{(variación de } \mathscr{C} \text{ en el subdominio)}$$

$$\iiint_V \Big(b + \zeta\varphi \Big)\, d\Omega \qquad \longrightarrow \quad \text{(contribución de las fuentes)}$$

$$-\iint_{\partial V} \Big(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho\ \bar{\boldsymbol{a}} \Big)^T \bar{\boldsymbol{n}}\ d\Gamma \longrightarrow \quad \text{(pérdidas a través del contorno)}$$

$$\forall V \subset \Omega,\ \forall t.$$

Mediante el **Teorema de la Divergencia**,

$$\iint_{\partial V} \left[\Big(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho\ \bar{\boldsymbol{a}} \Big)^T \bar{\boldsymbol{n}} \right] d\Gamma = \iiint_V \operatorname{div}\Big(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho\ \bar{\boldsymbol{a}} \Big)\, d\Omega,$$

Ecuación de Conservación de Euler (IIIc)

…se obtiene

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\boxed{c\rho}\right) d\Omega = \quad \longrightarrow \quad \text{(variación de } \mathscr{C} \text{ en el subdominio)}$$

$$\iiint_V \left(\boxed{b+\zeta\varphi}\right) d\Omega \quad \longrightarrow \quad \text{(contribución de las fuentes)}$$

$$-\iiint_V \operatorname{div}\left(\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \boxed{c\rho}\ \boxed{\bar{\boldsymbol{a}}}\right) d\Omega \longrightarrow \quad \text{(pérdidas a través del contorno)}$$

$$\forall V \subset \Omega,\ \forall t.$$

Finalmente, aplicando el **Principio de Localización**,

$$\iiint_V \Psi\, d\Omega = 0 \quad \forall V \subset \Omega,\ \forall t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Psi = 0 \quad \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t,$$

Ecuación de Conservación de Euler (IIId)

...podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\boxed{c\rho}\right) = \qquad \longrightarrow \quad \text{(variación de } \mathscr{C} \text{ en el subdominio)}$$

$$\left(\boxed{b+\zeta\varphi}\right) \qquad \longrightarrow \quad \text{(contribución de las fuentes)}$$

$$- \operatorname{div}\left(\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} + \boxed{c\rho}\ \boxed{\bar{\boldsymbol{a}}}\right) \qquad \longrightarrow \quad \text{(pérdidas a través del contorno)}$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.$$

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Diferencial Euleriana)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho\right) + \operatorname{div}\left(\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho\ \bar{\boldsymbol{a}}\right) - \left[b + \zeta\varphi\right] = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.$$

Ecuación de Conservación de Euler (IVb)

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Diferencial Euleriana)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\; c\rho \; \right) + \operatorname{div}\left(\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \; + \; c\rho \quad \bar{\boldsymbol{a}} \; \right) - \left[\; b + \zeta\varphi \; \right] = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega}, \; \forall t.$$

El término $b + \zeta\varphi$

agrupa las contribuciones de todas las fuentes.

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Diferencial Euleriana)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\,c\rho\,\Big) + \operatorname{div}\Big(\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \;+\; c\rho \quad \bar{\boldsymbol{a}}\,\Big) - \Big[\,b + \zeta\varphi\,\Big] = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.$$

El término $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ $\longrightarrow$ (densidad de flujo difusivo)

cuantifica el efecto del **TRANSPORTE POR DIFUSIÓN** (*).

(*) Tiene lugar en el medio. Normalmente es lento.
Está provocado por la diferente concentración de $\mathscr{C}$ entre zonas próximas del medio.
No queda determinado a este nivel. Para ello se requiere una **ECUACIÓN CONSTITUTIVA** adicional.

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Diferencial Euleriana)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(c\rho \Big) + \mathrm{div}\Big(\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \ + \ c\rho \quad \bar{\boldsymbol{a}} \Big) - \Big[\ b + \zeta\varphi \ \Big] = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega}, \ \forall t.$$

El término $c\rho \ \bar{\boldsymbol{a}}$ $\longrightarrow$ (densidad de flujo convectivo)

cuantifica el efecto del **TRANSPORTE POR CONVECCIÓN** (*).

(*) Tiene lugar en el espacio. Normalmente es rápido.
Está provocado por el movimiento del medio en el espacio.
Queda completamente determinado a este nivel.

Ecuación de Conservación de Euler (Va)

Para cualquier magnitud física $\mathscr{C}$,

$\rightarrow$ **ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE $\mathscr{C}$**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho\right) + \operatorname{div}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho\,\bar{\boldsymbol{a}}\right) - \left[b + \zeta\varphi\right] = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.$$

Cuando $\mathscr{C}$ es la **MASA** ($c = 1$) ...

$\rightarrow$ **ECUACIÓN DE CONTINUIDAD**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\right) + \operatorname{div}\left(\rho\,\bar{\boldsymbol{a}}\right) - \left[\varphi\right] = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.$$

No hay términos difusivos $\longrightarrow$ no se requiere una **Ecuación Constitutiva**.

Ecuación de Conservación de Euler (Vc)

Cuando $\mathscr{C}$ es **CONTAMINACIÓN/CALOR/CARGA** ($c = u$) . . . (*)

$\rightarrow$ **ECUACIÓN DE TRANSPORTE POR CONVECCIÓN-DIFFUSIÓN**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Big(u\rho \Big) + \mathrm{div}\Big(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + u\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \Big) - \Big[b + \zeta\varphi \Big] = 0 \qquad \forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.}$$

Formulación estándar $\longrightarrow$ complementada con la **Ley de Fick/Fourier/Ohm**:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \rho\,\bar{\boldsymbol{q}}, \qquad \bar{\boldsymbol{q}} = -\underset{\sim}{\gamma}\;\overline{\mathbf{grad}}(u), \qquad \overline{\mathbf{grad}}(\cdot) = \left(\frac{\partial\ \cdot}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}}\right)^T.$$

(*) La ecuación del calor es un caso particular, con $u = c_e\theta$ donde c_e es el calor específico y θ es la temperatura.

Ecuación de Conservación de Euler (Vd)

Cuando $\mathscr{C}$ es el **MOMENTO LINEAL** ($c = \bar{\boldsymbol{a}}$) ...

→ **ECUACIÓN DE CAUCHY / NAVIER**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\boldsymbol{a}}\rho\right) + \overline{\mathbf{div}}\left(-\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\boldsymbol{a}}\rho\ \bar{\boldsymbol{a}}^T\right) - \left[\bar{\boldsymbol{b}} + \bar{\zeta}\varphi\right] = \bar{\mathbf{0}}$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.$$

Fluidos newtonianos ⟶ complementado con el **tensor de tensiones de Stokes**: (*)

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = -p\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + 2\mu\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{e}})\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}\right), \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\ell}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\ell}}^T\right), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\ell}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}}\bar{\boldsymbol{a}}.$$

(*) El conjunto completo constituye las ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.

Ecuación de Conservación de Euler (Ve)

Cuando $\mathscr{C}$ es la **ENERGÍA, etc.** ...

$\rightarrow$ **ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE $\mathscr{C}$**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho \right) + \operatorname{div}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \right) - \left[b+\zeta\varphi \right] = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega}, \; \forall t.$$

Complementada con una **Ecuación Constitutiva** adecuada

que defina $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ en función de la distribución de c.

Ecuación de Conservación de Euler (VI)

Additionalmente es preciso tener en cuenta

- **CONDICIONES DE CONTORNO NATURALES** (conservación en el contorno):

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \bar{\boldsymbol{n}} = g(\bar{\boldsymbol{r}}, t) \qquad \bar{\boldsymbol{r}} \in \Gamma_\sigma.}$$

- **CONDICIONES DE CONTORNO ESENCIALES** (valores forzados):

$$\boxed{c = c_\Gamma(\bar{\boldsymbol{r}}, t) \qquad \bar{\boldsymbol{r}} \in \Gamma_u.}$$

Ecuación de Conservación de Euler (VII)

En procesos no estacionarios es preciso tener en cuenta

- **CONDICIONES INICIALES**
  (si la magnitud depende del tiempo):

$$\boxed{c(\bar{\boldsymbol{r}}, 0) = c_0(\bar{\boldsymbol{r}}) \qquad \bar{\boldsymbol{r}} \in \Omega.}$$

Ecuación de Conservación de Euler (VIIIa)

La Ecuación de Conservación de Euler rige gran parte de los fenómenos físicos más relevantes en Ingeniería. . .

- ♣ **Mecánica de Sólido**,
- ♣ **Dinámica de Fluidos**, y
- ♣ **Transporte de contaminación, carga, calor, etc.,**

complementada con las adecuadas

ECUACIONES CONSTITUTIVAS,

pero siempre con el mismo. . .

Ecuación de Conservación de Euler (VIIIb)

. . . principio subyacente de **CONSERVACIÓN/EQUILIBRIO**

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(\ c\rho\ \Big) + \mathrm{div}\Big(\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho\ \ \bar{\boldsymbol{a}}\ \ \Big) - \Big[\ b+\zeta\varphi\ \Big] = 0 \\ \forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega},\ \forall t.\end{array}}$$

donde el término convectivo $c\rho\ \bar{\boldsymbol{a}}$ es **PROBLEMÁTICO**. (*)

(*) Ninguna de las técnicas actuales es capaz de lidiar eficientemente con el término convectivo.
Si este término está presente, el método numérico requiere ser “estabilizado”.
Esta es la razón por la que los problemas de CFD son tan difíciles.

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Diferencial Euleriana)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho \right) =$$

$$\left(b + \zeta\varphi \right)$$

$$- \quad \mathrm{div}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \right)$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega}, \ \forall t.$$

Mediante el **Método de Residuos Ponderados**,

$$\Psi = 0 \quad \bar{\boldsymbol{r}} \in \mathring{\Omega}, \ \forall t, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \iiint_{\Omega} \varpi \, \Psi \, d\Omega = 0 \quad \forall \varpi, \ \forall t$$

. . . se obtiene la **Forma Variacional**

$$\iiint_\Omega \varpi \frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho \right) d\Omega =$$

$$\iiint_\Omega \varpi \left(b + \zeta\varphi \right) d\Omega$$

$$- \iiint_\Omega \varpi \operatorname{div}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \right) d\Omega$$

$$\forall \varpi, \; \forall t.$$

Operando,

$$-\varpi \operatorname{div}\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + u\rho\, \bar{\boldsymbol{a}}\right) = \frac{\partial \varpi}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + u\rho\, \bar{\boldsymbol{a}}\right) - \operatorname{div}\left(\varpi \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + u\rho\, \bar{\boldsymbol{a}}\right)\right),$$

Forma Débil. Método de Galerkin (Ic)

…se obtiene la **Forma Variacional** equivalente

$$
\begin{aligned}
\iiint_\Omega \varpi \frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho \right) d\Omega = & \\
& \iiint_\Omega \varpi \left(b + \zeta\varphi \right) d\Omega \\
& + \iiint_\Omega \frac{\partial \varpi}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \, \bar{\boldsymbol{a}}) \right) d\Omega \\
& - \iiint_\Omega \operatorname{div}\left(\varpi \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \, \bar{\boldsymbol{a}} \right) \right) d\Omega
\end{aligned}
$$

$$\forall \varpi, \ \forall t.$$

Mediante el **Teorema de la Divergencia**,

$$\iiint_V \operatorname{div}\left(\varpi \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + u\rho \, \bar{\boldsymbol{a}} \right) \right) d\Omega = \iint_{\partial V} \varpi \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + u\rho \, \bar{\boldsymbol{a}} \right)^T \bar{\boldsymbol{n}} \, d\Gamma,$$

Forma Débil. Método de Galerkin (Id)

...podemos escribir la **Forma Variacional Débil** equivalente (*)

$$\iiint_\Omega \varpi \frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho \right) d\Omega =$$

$$\iiint_\Omega \varpi \left(b + \zeta\varphi \right) d\Omega$$

$$+\iiint_\Omega \frac{\partial \varpi}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \right) d\Omega$$

$$-\iint_{\partial\Omega} \varpi \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \right)^T \bar{\boldsymbol{n}} \; d\Gamma$$

$$\forall \varpi, \; \forall t.$$

(*) **Principio de D'Alambert** o **Principio de los Trabajos Virtuales**.

ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN (Forma Débil Euleriana)

$$\iiint_\Omega \varpi \frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho \right) d\Omega =$$

$$\iiint_\Omega \varpi \left(b + \zeta\varphi \right) d\Omega$$

$$+ \iiint_\Omega \frac{\partial \varpi}{\partial \bar{\boldsymbol{r}}} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \right) d\Omega$$

$$- \iint_{\partial\Omega} \varpi \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + c\rho \; \bar{\boldsymbol{a}} \right)^T \bar{\boldsymbol{n}} \; d\Gamma$$

$$\forall \varpi, \; \forall t.$$

Forma Débil. Método de Galerkin (III)

DISCRETIZACIÓN (ELEMENTOS FINITOS)

- Se discretizan las **FUNCIONES DE PRUEBA**

$$c(\bar{\boldsymbol{r}},t) \approx c^h(\bar{\boldsymbol{r}},t) = \sum_I c_I(t)\,\phi_I(\bar{\boldsymbol{r}}) + c_P(\bar{\boldsymbol{r}},t),$$

con $\phi_I(\bar{\boldsymbol{r}}) = 0 \qquad \bar{\boldsymbol{r}} \in \Gamma_u,$

con $c_P(\bar{\boldsymbol{r}},t) = c_\Gamma(\bar{\boldsymbol{r}},t) \qquad \bar{\boldsymbol{r}} \in \Gamma_u,$

con $c_P(\bar{\boldsymbol{r}},0) = c_0(\bar{\boldsymbol{r}}) \qquad \bar{\boldsymbol{r}} \in \Omega.$

- y las **FUNCIONES DE TEST**

$$\varpi(\bar{\boldsymbol{r}},t) \approx \varpi^h(\bar{\boldsymbol{r}},t) = \sum_J \beta_J(t)\,\varpi_J(\bar{\boldsymbol{r}}),$$

con $\varpi_J(\bar{\boldsymbol{r}}) = 0 \qquad \bar{\boldsymbol{r}} \in \Gamma_u.$

MÉTODO DE GALERKIN

$$\boxed{\varpi_J(\bar{\boldsymbol{r}}) = \phi_J(\bar{\boldsymbol{r}}).}$$

♡ Funciona bien en condiciones de **DIFFUSIÓN dominante**.
(como es el caso de SÓLIDOS y FLUIDOS con movimientos lentos)

♠ No funciona bien en condiciones de **CONVECCIÓN dominante**.
(como es el caso de la mayor parte de los problemas de CFD)

Forma Débil. Método de Galerkin (Va)

La solución numérica de la formulación estándar en condiciones de CONVECCIÓN dominante requiere estabilización

- Se han propuesto varias técnicas:
  - Difusión Artificial
  - Métodos Contracorriente (SUPG)
  - Taylor-Galerkin (TG)
  - Galerkin Least-Squares (GLS)
  - Finite Increment Calculus (FIC)

- Esencialmente,todas estas técnicas consiguen estabilizar el problema añadiendo difusión (*), ya sea
  - automáticamente (como TG), o bien
  - en las cantidades prescritas.

(*) Pero, ¿cuál es la cantidad correcta de difusión que debería ser añadida en cada caso?

Forma Débil. Método de Galerkin (Vb)

- En este momento, otras técnicas como
  - Volúmenes Finitos (FV)
  - Discontinuous Galerkin (DG)

  están atrayendo especial atención, debido a su probada robustez.

- En estas técnicas se pone énfasis en mantener los flujos bajo control. (*)
  - Para ello, es preciso estimar los flujos numéricos en el contorno de los elementos .

(*) Pero, ¿son los resultados suficientemente precisos?