TEORÍA DE CAMPOS: NOTACIÓN Y FORMULARIO

F. Navarrina, L. Ramírez & GMNI

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fermin.navarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

Campos escalares, vectoriales y tensoriales (I)

EN COORDENADAS CURVÍLINEAS GENERALES:

1) Campo escalar:

$$f(\bar{u})$$

2) Campo Vectorial:

$$\vec{f}(\bar{u}) = \vec{h}_i \, f^{\,i}(\bar{u}) = \vec{h}^{\,p} \, f_p(\bar{u})$$

3) Campo tensorial de orden 2 o superior:

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{f}(\bar{u}) &= \left(\vec{h}_i \otimes \vec{h}^{\,j}\right) \; f^{\,i}{}_{j}(\bar{u}) = \left(\vec{h}^{\,p} \otimes \vec{h}_q\right) \; f_p{}^{q}(\bar{u}) \\ &= \left(\vec{h}_i \otimes \vec{h}_q\right) \; f^{\,iq}(\bar{u}) = \left(\vec{h}^{\,p} \otimes \vec{h}^{\,j}\right) \; f_{pj}(\bar{u}) \end{aligned} \qquad (*)$$

(*) Ejemplo de un campo tensorial de segundo orden.

Campos escalares, vectoriales y tensoriales (II)

EN COORDENADAS CARTESIANAS ORTONORMALES:

1) Campo escalar:

$$f(x, y, z)$$

2) Campo Vectorial:

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

3) Campo tensorial de orden 2 o superior:

$$\underset{\sim}{f}(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y, z) & f_{xy}(x, y, z) & f_{xz}(x, y, z) \\ f_{yx}(x, y, z) & f_{yy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \\ f_{zx}(x, y, z) & f_{zy}(x, y, z) & f_{zz}(x, y, z) \end{bmatrix} \qquad (*)$$

(*) Ejemplo de un campo tensorial de segundo orden.

Operadores diferenciales en cartesianas (I)

OPERADORES DIFERENCIALES:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \textbf{1) GRADIENTE} \\ \textbf{2) DIVERGENCIA} \\ \textbf{3) ROTACIONAL} \end{array}\right\} \quad \longleftarrow \text{ operadores simples} \\ \\ \textbf{4) LAPLACIANO} \qquad\qquad \longleftarrow \text{ operador compuesto} \end{array}\right.$$

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla} f = \vec{i}\ \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\ \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\ \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left[\vec{i}\ \ \vec{j}\ \ \vec{k} \right] \overline{\text{grad}}(f)$$

con

$$\boxed{\overline{\text{grad}}(f) = \overline{\nabla}\, f = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right\}}$$

GRADIENTE DE UN CAMPO VECTORIAL:

$$\underset{\approx}{\text{grad}}(\vec{f}\,) = \underset{\approx}{\nabla}\vec{f} = \left(\vec{i}\otimes\vec{i}\right)\frac{\partial f_x}{\partial x} + \left(\vec{i}\otimes\vec{j}\right)\frac{\partial f_x}{\partial y} + \left(\vec{i}\otimes\vec{k}\right)\frac{\partial f_x}{\partial z}$$
$$+ \left(\vec{j}\otimes\vec{i}\right)\frac{\partial f_y}{\partial x} + \left(\vec{j}\otimes\vec{j}\right)\frac{\partial f_y}{\partial y} + \left(\vec{j}\otimes\vec{k}\right)\frac{\partial f_y}{\partial z}$$
$$+ \left(\vec{k}\otimes\vec{i}\right)\frac{\partial f_z}{\partial x} + \left(\vec{k}\otimes\vec{j}\right)\frac{\partial f_z}{\partial y} + \left(\vec{k}\otimes\vec{k}\right)\frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\underset{\sim}{\text{grad}}(\vec{f}\,) = \underset{\sim}{\nabla}\vec{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_x}{\partial x} & \dfrac{\partial f_x}{\partial y} & \dfrac{\partial f_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} & \dfrac{\partial f_y}{\partial y} & \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial x} & \dfrac{\partial f_z}{\partial y} & \dfrac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix}}$$

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL:

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{f}\,) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}$$

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

Operadores diferenciales compuestos (I)

LAPLACIANO DE UN CAMPO ESCALAR:

$$\boxed{\Delta f = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\ f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Operadores diferenciales compuestos (II)

LAPLACIANO DE UN CAMPO VECTORIAL:

$$\vec{\Delta}\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{div}}\Big(\underset{\approx}{\mathrm{grad}}(\vec{f}\,)\Big) \qquad \text{(*)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\Delta}\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\Big(\,\mathrm{div}(\vec{f}\,)\,\Big) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\Big(\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,)\,\Big) = \vec{i}\;\;\Delta f_x + \vec{j}\;\;\Delta f_y + \vec{k}\;\;\Delta f_z \qquad \text{(**)}$$

(*) La divergencia de un tensor de segundo orden es un vector, cuya expresión no se da en este formulario.
(**) Se puede demostrar que esta expresión es equivalente a la anterior.

OPERADORES COMPUESTOS IDÉNTICAMENTE NULOS:

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,(\,f\,)\right) = \vec{0}}$$

(*)

$$\boxed{\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\;(\,\vec{f}\,)\right) = 0}$$

(*) Regla nemotécnica: **R**e**G**a–**D**e**R**a.

Otras expresiones útiles (I)

LINEALIDAD DE LOS OPERADORES DIFERENCIALES:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\,(f) + \mu\, \overrightarrow{\text{grad}}\,(g)$$

$$\underset{\approx}{\text{grad}}\,(\lambda\, \vec{f} + \mu\, \vec{g}) = \lambda\, \underset{\approx}{\text{grad}}\,(\vec{f}\,) + \mu\, \underset{\approx}{\text{grad}}\,(\vec{g}\,)$$

$$\text{div}\,(\lambda\, \vec{f} + \mu\, \vec{g}) = \lambda\, \text{div}\,(\vec{f}\,) + \mu\, \text{div}\,(\vec{g}\,)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\lambda\, \vec{f} + \mu\, \vec{g}) = \lambda\, \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{f}\,) + \mu\, \overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{g}\,)$$

$$\Delta\,(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, \Delta\,(f) + \mu\, \Delta\,(g)$$

$$\vec{\Delta}\,(\lambda\, \vec{f} + \mu\, \vec{g}) = \lambda\, \vec{\Delta}\,(\vec{f}) + \mu\, \vec{\Delta}\,(\vec{g})$$

OPERADORES APLICADOS A CAMPOS COMPUESTOS:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f \quad g) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f\,) \quad g + f \quad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(g\,)$$

$$\mathrm{div} \quad (f \quad \vec{g}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f\,) \cdot \ \vec{g} + f \quad \mathrm{div} \quad (\vec{g}\,)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \quad (f \quad \vec{g}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f\,) \wedge \vec{g} + f \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}} \quad (\vec{g}\,)$$

$$\mathrm{div} \quad (\vec{f} \wedge \vec{g}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}} \quad (\vec{f}\,) \cdot \ \vec{g} - \vec{f} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}} \quad (\vec{g}\,)$$

CAMPO **IRROTACIONAL** (O CONSERVATIVO):

$\vec{f}$ **IRROTACIONAL** $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\,\vec{f}\,) = \vec{0}$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\,V\,)} \quad (*)$$

(*) Todo campo irrotacional deriva de un **POTENCIAL ESCALAR** (V).

CAMPO **SOLENOIDAL**:

$\vec{f}$ **SOLENOIDAL** $\quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{div}\,(\,\vec{f}\,) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\,\vec{g}\,)} \qquad (*)$$

(*) Todo campo solenoidal deriva de un **POTENCIAL VECTORIAL** ($\vec{g}$).

Campos especialmente importantes (III)

DESCOMPOSICIÓN DE HELMHOLTZ:

$$\forall \vec{f}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\exists \;\; \vec{f}_S, \;\; \vec{f}_I \;\;\; / \;\;\; \vec{f} = \vec{f}_S + \vec{f}_I \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{f}_S) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{f}_I) = \vec{0} \end{array} \right.} \quad (*)$$

(*) Todo campo suficientemente regular puede descomponerse como suma de una campo solenoidal y un campo irrotacional.

CAMPO **ARMÓNICO** (IRROTACIONAL Y SOLENOIDAL):

$$\vec{f} \quad \textbf{ARMÓNICO} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{f}\,) = \vec{0}} & \longrightarrow \quad \vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V) \\ \boxed{\mathrm{div}\,(\vec{f}\,) = 0} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V) \quad \text{con} \quad \Delta\,(V) = 0} \qquad (*)$$

(*) Todo campo armónico deriva de una **FUNCIÓN ARMÓMICA** (V), esto es: un potencial escalar cuyo laplaciano es cero.

CAMPO **CENTRAL**:

$\vec{f}$ **CENTRAL** $\iff$ $\vec{f} = f\,(\,r\,)\ \dfrac{\vec{r}}{r}$ con $r = |\vec{r}|$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{f} = \vec{0}} \quad (*)$$

(*) Se comprueba fácilmente que el rotacional se anula, por lo que todo campo central es irrotacional (o conservativo).

Campos especialmente importantes (VI)

CAMPO **NEWTONIANO**:

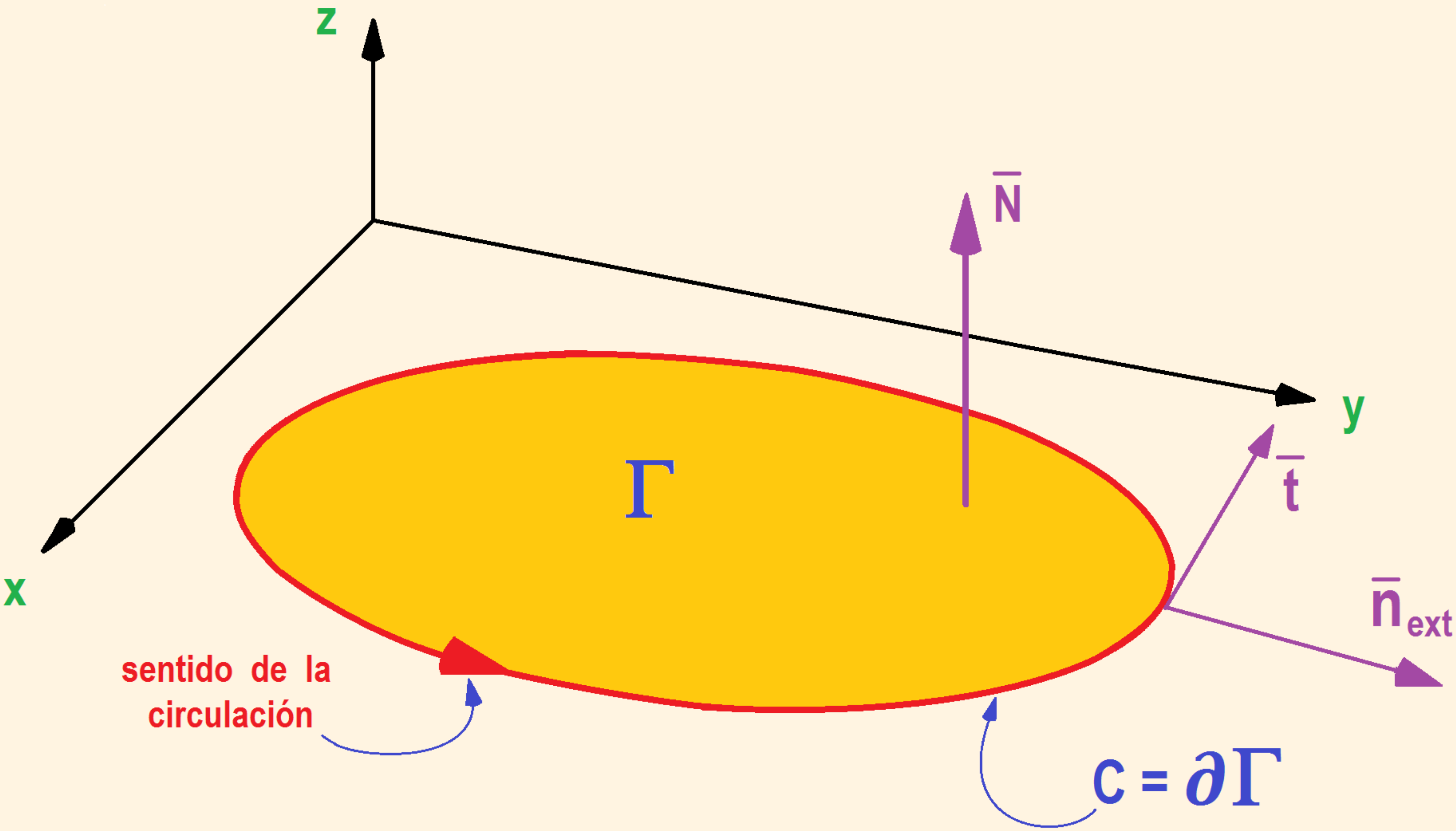
$\vec{f}$ **NEWTONIANO** $\Longleftrightarrow$ $\vec{f} = \dfrac{-k}{r^2}\,\dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{-k}{r^3}\,\vec{r}$ con $r = |\vec{r}|$

$$\Downarrow$$

$\vec{f}$ **CENTRAL** y **ARMÓNICO** (*)

(*) Es irrotacional por ser central. Y se comprueba fácilmente que la divergencia se anula, por lo que también es solenoidal.

Teoremas integrales (Ia)



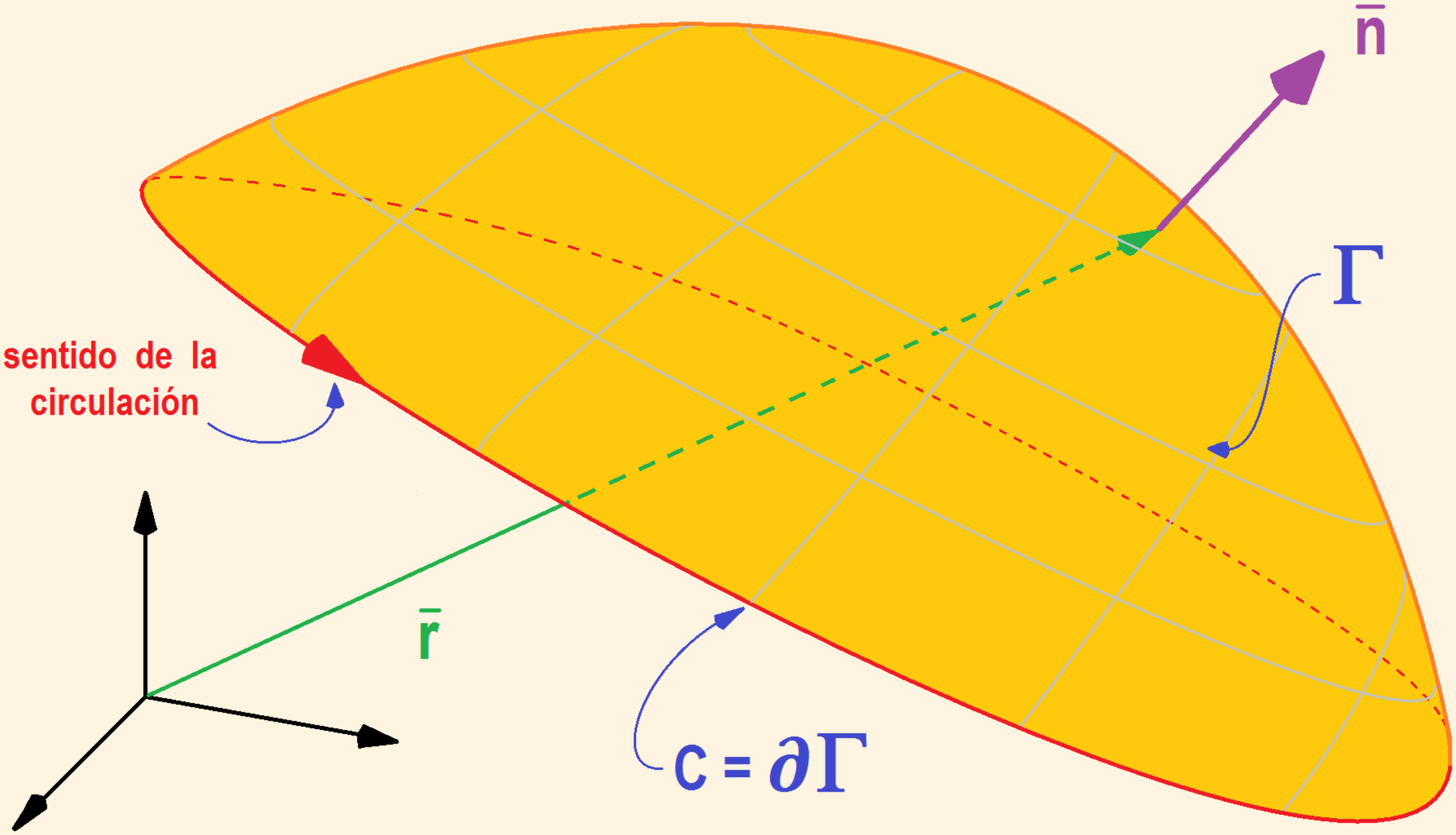
TEOREMA DE GREEN (en $\mathbb{R}^3$)

TEOREMA DE GREEN:

$$\boxed{\iint_{\Gamma} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) d\Gamma = \oint_{\partial\Gamma} (p dx + q dy)} \quad (*)$$

(*) El sentido de la circulación debe ser el indicado en la figura (antihorario).

Teoremas integrales (IIa)

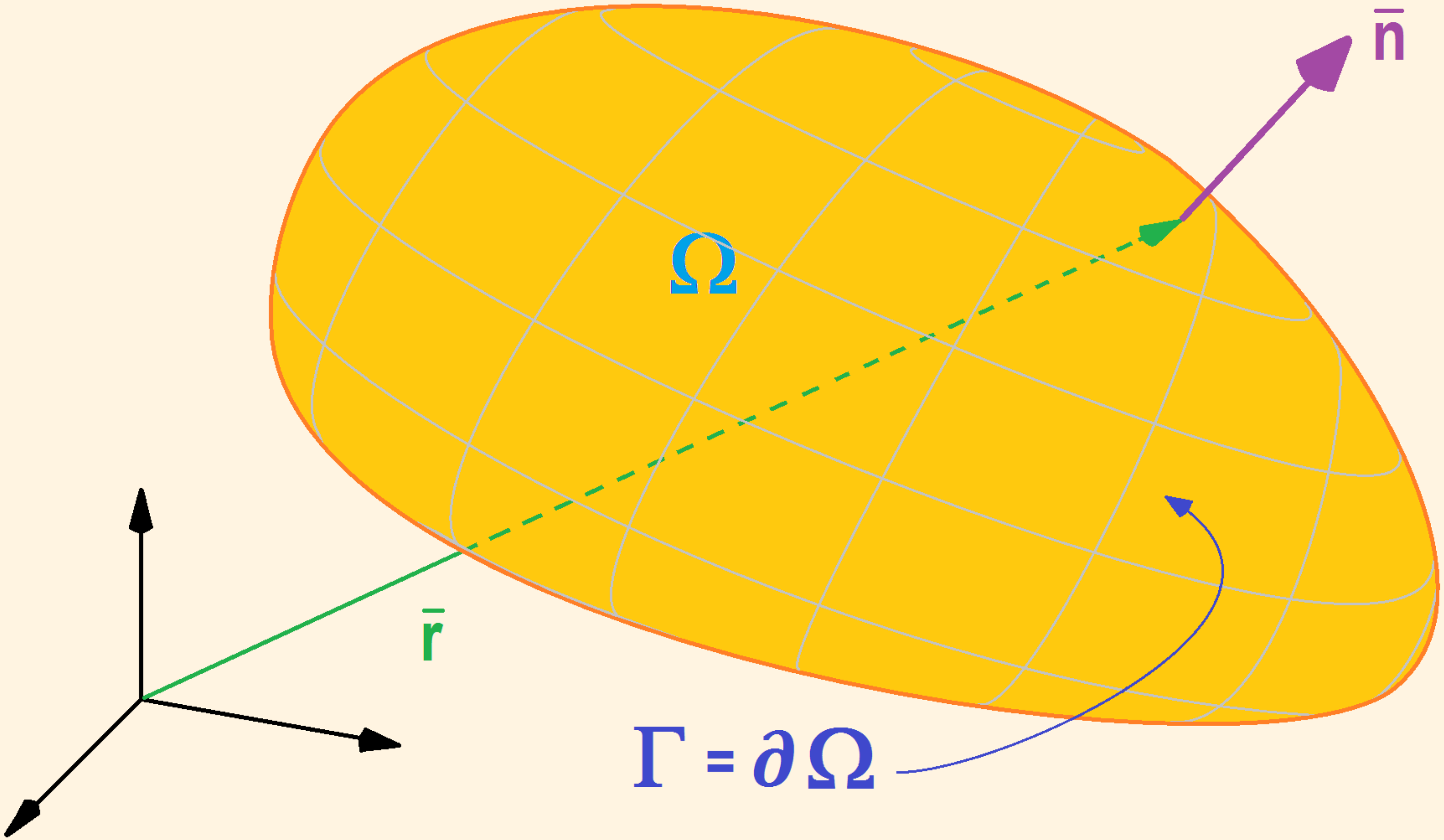


TEOREMA DE STOKES (en $\mathbb{R}^3$)

TEOREMA DE STOKES:

$$\boxed{\oint_{\partial\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Gamma} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}) \cdot \vec{n} \; d\Gamma} \qquad (*)$$

(*) $\vec{n} \equiv$ vector normal a la superficie.
Los sentidos de $\vec{n}$ y de la circulación deben ser compatibles (regla del sacacorchos).



TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKI (en $\mathbb{R}^3$)

Teoremas integrales (IIIb)

TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKI (O DE LA DIVERGENCIA):

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{n}\ \ d\Gamma = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\vec{f}\,)\ \ d\Omega} \qquad (*)$$

(*) $\vec{n} \equiv$ vector normal **exterior** a la superficie.

Teoremas integrales (IV)

IDENTIDADES DE GREEN:

Primera Identidad de Green: Teorema de la divergencia aplicado a $\vec{f} = U\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)$

$$\iiint_{\Omega} \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U) \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) + U\ (\Delta V)\right) d\Omega = \oiint_{\partial\Omega} U\ \frac{\partial V}{\partial n}\ d\Gamma$$

Segunda Identidad de Green: Teorema de la divergencia aplicado a $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(U)\ V$

$$\iiint_{\Omega} \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(U) \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) + (\Delta U)\ V\right) d\Omega = \oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial n}\ V\ d\Gamma$$

Tercera Identidad de Green: Diferencia entra la primera y la segunda identidad de Green

$$\iiint_{\Omega} (U\ (\Delta V) - (\Delta U)\ V)\, d\Omega = \oiint_{\partial\Omega} \left(U\ \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial n}\ V\right)\ d\Gamma$$

TEOREMAS DEL GRADIENTE Y DEL ROTACIONAL:

Teorema del Gradiente

$$\oiint_{\partial\Omega} f \;\; \vec{n} \;\; d\Gamma = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \;\; d\Omega \qquad (*)$$

Teorema del Rotacional

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{f} \wedge \vec{n} \;\; d\Gamma = - \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) \;\; d\Omega \qquad (**)$$

(*) Aplicación del Teorema de la Div. sucesivamente a $\vec{f} = f\ \vec{i}$, $\vec{f} = f\ \vec{j}$, $\vec{f} = f\ \vec{k}$.
(**) Aplicación del teorema de la Div. a $\vec{g} = \vec{a} \wedge \vec{f}$ con $\vec{a} =$ constante.

Expresión integral de los operadores diferenciales (I)

SIGNIFICADO INTRÍNSECO:

Gradiente: Teorema del gradiente aplicado al campo $f(\bar{u})$ en la bola $B(\vec{r}, \varepsilon)$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\displaystyle\oiint_{\partial B(\vec{r},\varepsilon)} f\ \vec{n}\ d\Gamma}{4/3\ \pi\ \varepsilon^3}$$

Divergencia: Teorema de la divergencia aplicado al campo $\vec{f}(\bar{u})$ en la bola $B(\vec{r}, \varepsilon)$

$$\mathrm{div}(\vec{f}\,) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\displaystyle\oiint_{\partial B(\vec{r},\varepsilon)} \vec{f} \cdot \vec{n}\ d\Gamma}{4/3\ \pi\ \varepsilon^3}$$

Rotacional: Teorema del rotacional aplicado al campo $\vec{f}(\bar{u})$ en la bola $B(\vec{r}, \varepsilon)$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \lim_{\varepsilon \to 0}\ - \frac{\displaystyle\oiint_{\partial B(\vec{r},\varepsilon)} \vec{f} \wedge \vec{n}\ d\Gamma}{4/3\ \pi\ \varepsilon^3}$$

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR: **(componentes COVARIANTES)**

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{h}^{\,j}\, f_{,\,j} \quad \text{con} \quad f_{,\,j} = \frac{\partial f}{\partial u^j}}$$

$$\Downarrow$$

(*)

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \widetilde{H}\ \underline{\nabla}\, f \quad \text{con} \quad \underline{\nabla}\, f = \begin{Bmatrix} f_{,1} \\ \vdots \\ f_{,\nu} \end{Bmatrix}}$$

(*) Expresión del vector gradiente en la base dual.

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR: **(componentes CONTRAVARIANTES)**

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \vec{h}_i \, f_{,}{}^{i} \quad \text{con} \quad f_{,}{}^{i} = g^{ij} \, f_{,j}$$

$$\Downarrow$$

(*)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \underset{\sim}{H} \; \overline{\nabla} f \quad \text{con} \quad \overline{\nabla} f = \begin{Bmatrix} f_{,}{}^{1} \\ \vdots \\ f_{,}{}^{\nu} \end{Bmatrix}$$

(*) Expresión del vector gradiente en la base natural.

Operadores diferenciales en curvilíneas (II)

GRADIENTE DE UN CAMPO VECTORIAL:

$$\underset{\approx}{\mathrm{grad}}(\vec{f}) = \left(\vec{h}_i \otimes \vec{h}^{\,j}\right) f^{\,i}{}_{,\,j} \quad \text{con} \quad f^{\,i}{}_{,\,j} = \frac{\partial f^{\,i}}{\partial u^j} + \Gamma^i{}_{kj}\, f^{\,k}$$

$$\Downarrow$$

(*)

$$\underset{\sim}{\mathrm{grad}}(\vec{f}) = \begin{bmatrix} f^{\,1}{}_{,\,1} & \cdots & f^{\,1}{}_{,\,\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{\,\nu}{}_{,\,1} & \cdots & f^{\,\nu}{}_{,\,\nu} \end{bmatrix}$$

(*) Expresión del tensor gradiente en componentes **CONTRA–COVARIANTES**).

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL:

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{f}\,) = f^{\,i}{}_{,\,i} = \frac{\partial f^{\,i}}{\partial u^i} + \Gamma^i{}_{ki}\, f^{\,k}}$$

Cálculo práctico:

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{f}\,) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g}\, f^i \right)}$$

ROTACIONAL DE UN CAMPO VECTORIAL:

$$\underset{\approx}{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \left(\vec{h}^{\,i} \otimes \vec{h}^{\,j}\right)\left(f_{i,j} - f_{j,i}\right) \quad \text{con} \quad \left(f_{i,j} - f_{j,i}\right) = \ldots = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u^j} - \frac{\partial f_j}{\partial u^i}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{f}\,) = \pm\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{h}_1 & \vec{h}_2 & \vec{h}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

(*) Campo en covariantes $\longrightarrow$ expresión del vector rotacional en contravariantes.

Nota: El signo depende de la quiralidad de la base.

Operadores diferenciales en curvilíneas (V)

LAPLACIANO DE UN CAMPO ESCALAR:

$$\boxed{\Delta f = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\ \frac{\partial}{\partial u^i}\ \left(\sqrt{g}\ \ g^{ij}\ \ \frac{\partial f}{\partial u^j}\right)}$$