GEOM. DIFERENCIAL DE SUPERFICIES REGULARES: NOTACIÓN Y FORMULARIO

F. Navarrina, L. Ramírez & GMNI

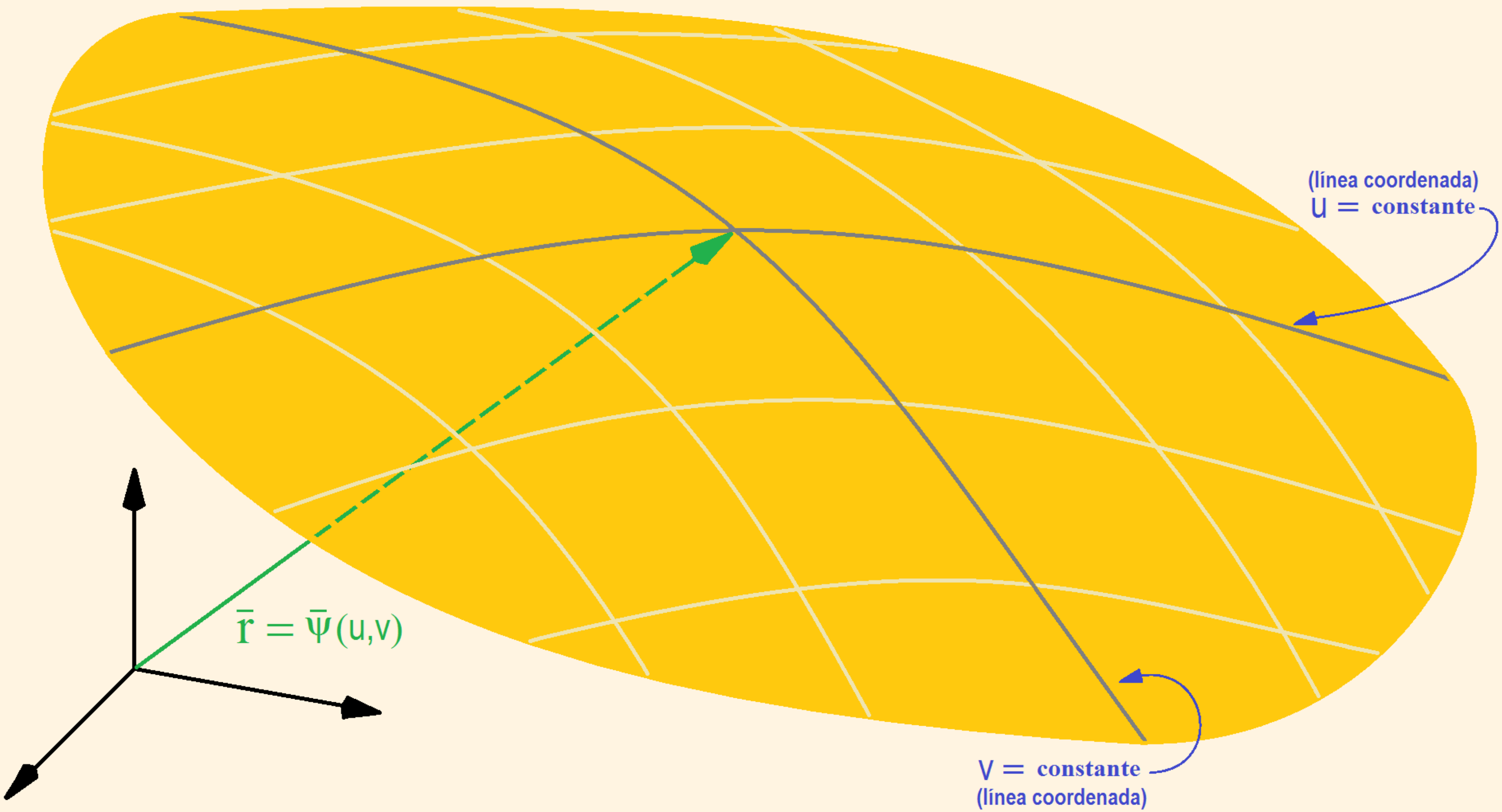
GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fermin.navarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

Representación de una superficie en paramétricas (I)



REPRESENTACIÓN DE UNA SUPERFICIE EN PARAMÉTRICAS ($\mathbb{R}^3$)

EXPRESIÓN GENERAL:

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{\psi}(u,v)\\ &= \vec{e}_i \;\; \psi^i(u,v)\end{aligned}\right\} \quad \text{con} \quad \vec{e}_i = \bar{e}_i = \left\{\begin{matrix} e^{\,1}{}_i \\ e^{\,2}{}_i \\ e^{\,3}{}_i \end{matrix}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{\psi}(u,v)\\ &= \underset{\sim}{E} \;\; \bar{\psi}(u,v)\end{aligned}\right\} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} e^{\,1}{}_1 & e^{\,1}{}_2 & e^{\,1}{}_3 \\ e^{\,2}{}_1 & e^{\,2}{}_2 & e^{\,2}{}_3 \\ e^{\,3}{}_1 & e^{\,3}{}_2 & e^{\,3}{}_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\psi}(u,v) = \left\{\begin{matrix} \psi^{\,1}(u,v) \\ \psi^{\,2}(u,v) \\ \psi^{\,3}(u,v) \end{matrix}\right\}$$

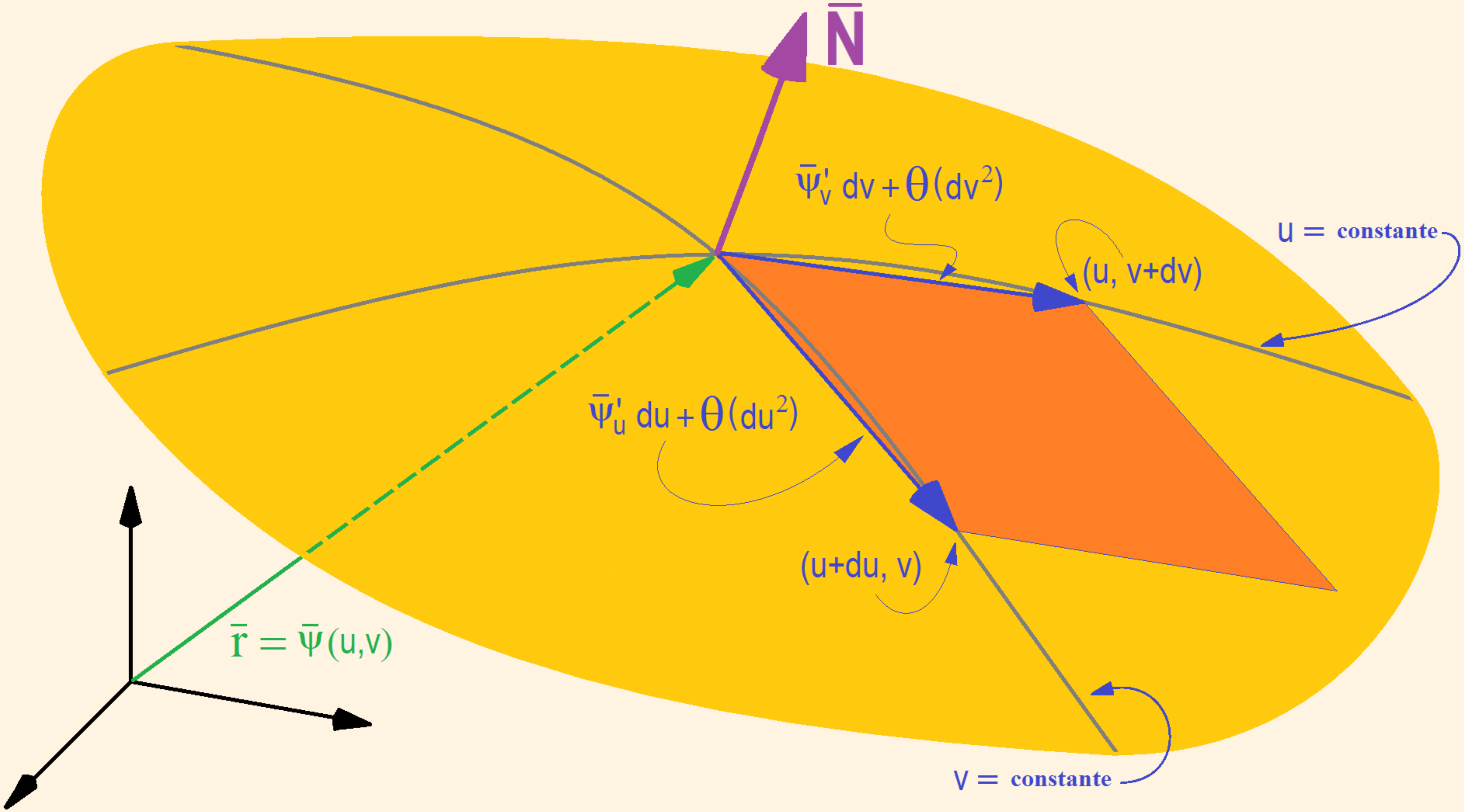
Representación de una superficie en paramétricas (III)

EXPRESIÓN GENERAL EN LA BASE CANÓNICA (ORTONORMAL): (*)

$$\boxed{\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u})} \quad \text{donde} \quad \boxed{\bar{u} = \left\{ \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\}} \quad \text{con} \quad \boxed{\bar{\psi}(\bar{u}) = \left\{ \begin{matrix} \psi^{\,1}(u,v) \\ \psi^{\,2}(u,v) \\ \psi^{\,3}(u,v) \end{matrix} \right\}}$$

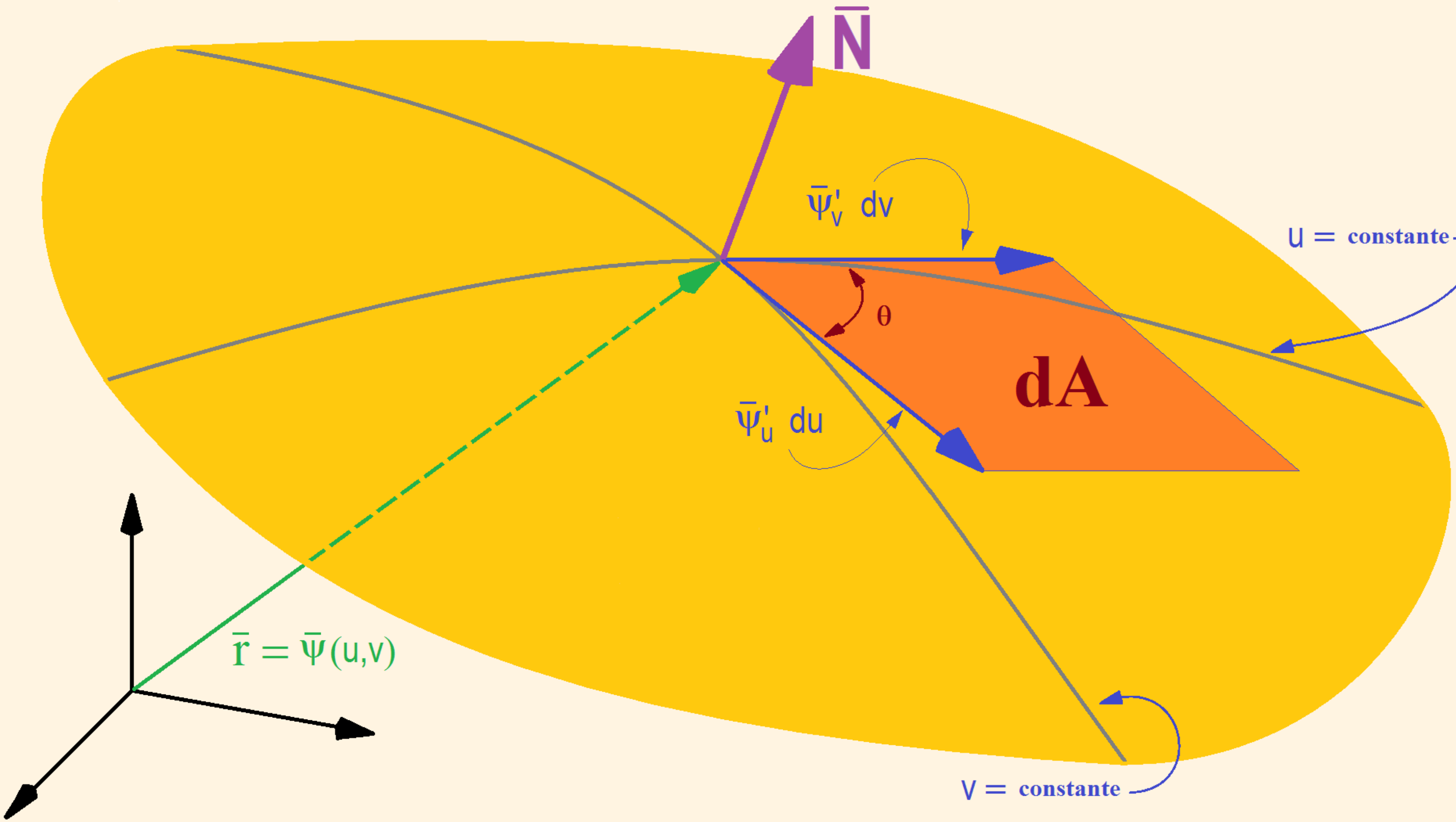
(*) Por tanto, $\vec{r} = \bar{r}$ y $\vec{\psi}(u,v) = \bar{\psi}(u,v)$.

Diferencial de área y vector normal (Ia)



DIFERENCIAL DE ÁREA: PLANTEAMIENTO

Diferencial de área y vector normal (Ib)



DIFERENCIAL DE ÁREA: DEFINICIÓN

Diferencial de área y vector normal (II)

DIFERENCIAL DE ÁREA:

$$dA = |\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v| \;\; du\, dv, \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} \bar{h}_u = \bar{\psi}_u' \\ \bar{h}_v = \bar{\psi}_v' \end{cases}$$

ÁREA:

$$A = \iint_{(u,v)\in D} |\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v| \;\; du\, dv, \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} \bar{h}_u = \bar{\psi}_u' \\ \bar{h}_v = \bar{\psi}_v' \end{cases}$$

Diferencial de área y vector normal (III)

MÓDULO DEL PRODUCTO VECTORIAL:

$$\boxed{\left|\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v\right| = \sqrt{EG - F^2}}\,, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \bar{h}_u \cdot \bar{h}_u \\ F = \bar{h}_u \cdot \bar{h}_v = \bar{h}_v \cdot \bar{h}_u \\ G = \bar{h}_v \cdot \bar{h}_v \end{array} \right. \qquad (*)$$

ÁNGULO ENTRE LÍNEAS COORDENADAS:

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{F}{\sqrt{E\,G}}}$$

(*) $EG - F^2 \geq 0$ necesariamente, debido a la desigualdad de Schwartz: $\left|\bar{h}_u \cdot \bar{h}_v\right| \leq \left|\bar{h}_u\right| \left|\bar{h}_v\right|$.

Diferencial de área y vector normal (IV)

VECTOR NORMAL:

$$\boxed{\bar{N} = \frac{\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v}{|\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v|}} \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_u = \bar{\psi}'_u \\ \bar{h}_v = \bar{\psi}'_v \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad |\,\bar{N}\,| = 1 \quad (*)$$

(*) El sentido de $\bar{N}$ es arbitrario y depende de la parametrización.

Diferencial de área y vector normal (V)

NOTACIÓN ESPECIAL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r}'_u = \dfrac{\partial \bar{\psi}}{\partial u} = \bar{\psi}'_u = \bar{h}_u \\ \bar{r}'_v = \dfrac{\partial \bar{\psi}}{\partial v} = \bar{\psi}'_v = \bar{h}_v \end{array} \right\} \longleftarrow$$

vectores naturales

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{A} = \left(\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v\right) \; du\, dv \\ dA = \left|d\bar{A}\right| = \left|\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v\right| \; du\, dv \\ \bar{N} \; = \dfrac{d\bar{A}}{\left|d\bar{A}\right|} = \dfrac{\left(\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v\right)}{\left|\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v\right|} \end{array} \right\}$$

Diferencial de área y vector normal (VI)

También:

$$\left|\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v\right| = \sqrt{EG - F^2}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} E = \bar{h}_u \cdot \bar{h}_u \\ F = \bar{h}_u \cdot \bar{h}_v = \bar{h}_v \cdot \bar{h}_u \\ G = \bar{h}_v \cdot \bar{h}_v \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \psi^1}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi^2}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi^2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi^3}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi^3}{\partial v} \end{bmatrix} = \left[\, \bar{r}'_u \quad \bar{r}'_v \,\right] = \left[\, \bar{h}_u \quad \bar{h}_v \,\right] = \underset{\sim}{H}$$

Recta normal y plano tangente

RECTA NORMAL: (*)

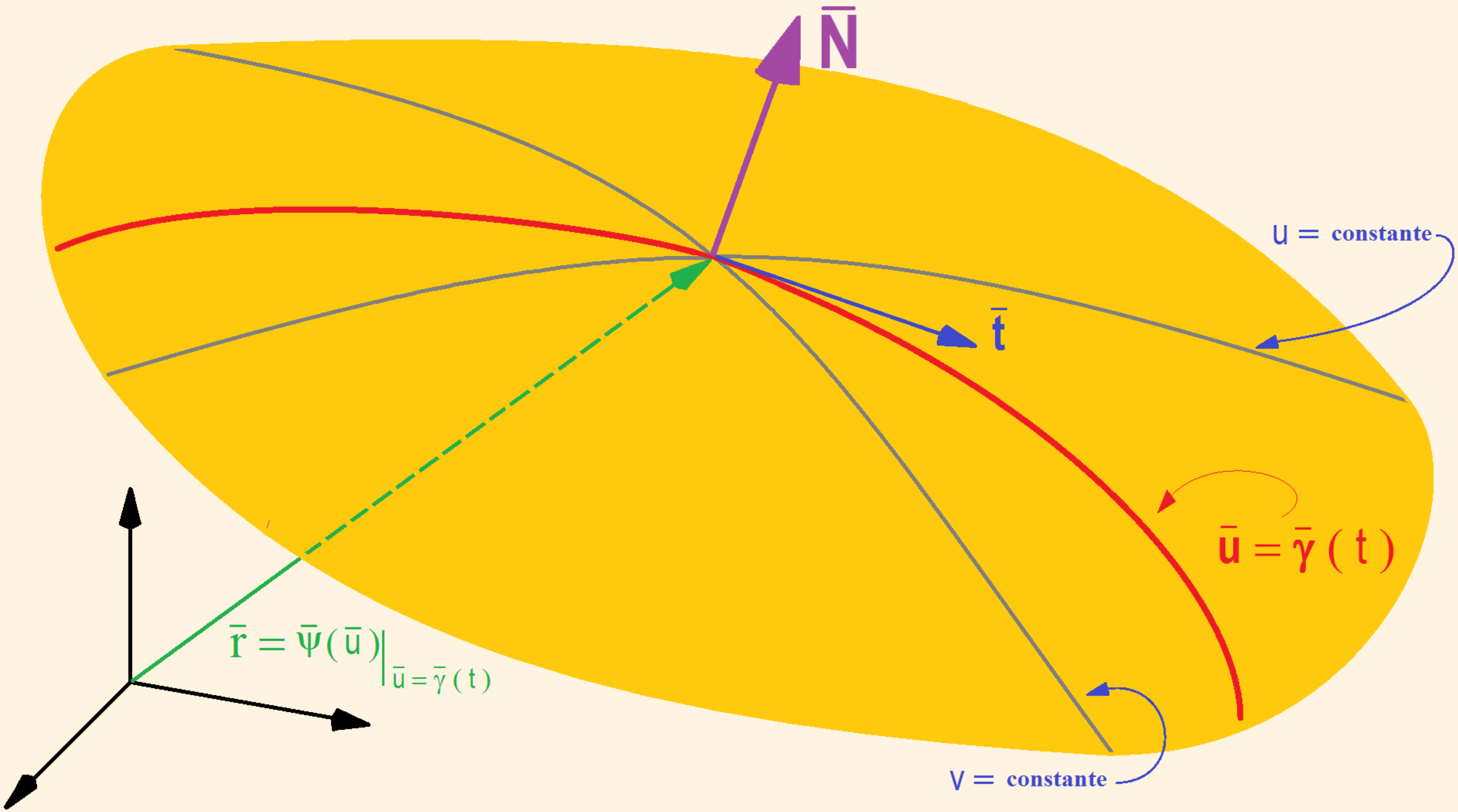
$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_\text{o} + \lambda \, \bar{N}_\text{o}}$$

PLANO TANGENTE: (*)

$$\bar{r} = \bar{r}_\text{o} + \lambda \, \frac{\bar{h}_u(u_\text{o}, v_\text{o})}{|\bar{h}_u(u_\text{o}, v_\text{o})|} + \mu \, \frac{\bar{h}_v(u_\text{o}, v_\text{o})}{|\bar{h}_v(u_\text{o}, v_\text{o})|} \iff \boxed{(\bar{r} - \bar{r}_\text{o}) \cdot \bar{N}_\text{o} = 0}$$

(*) $(u, v) = (u_\text{o}, v_\text{o}) \;\; \rightarrow \;\; \bar{r} = \bar{r}_\text{o}, \; \bar{N} = \bar{N}_\text{o}$.

Curva trazada sobre una superficie (I)



CURVA TRAZADA SOBRE UNA SUPERFICIE

CURVA TRAZADA SOBRE UNA SUPERFICIE:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{\psi}(\bar{u}) \\ \bar{u} &= \bar{\gamma}(t) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \bar{r} = \bar{\alpha}(t) \quad \text{con} \quad \bar{\alpha}(t) = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$d\bar{r} \;=\; \bar{r}'_u \, du + \bar{r}'_v \, dv \quad \text{con} \quad \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \;=\; \bar{\gamma}'(t)\, dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{d\bar{r} \;=\; \bar{h}_u \, du + \bar{h}_v \, dv = \underset{\sim}{H} \, d\bar{u} \quad \text{con} \quad \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \;=\; d\bar{u} = \bar{\gamma}'(t)\, dt}$$

Distancias y ángulos sobre una superficie (I)

PRIMERA FORMA CUADRÁTICA FUNDAMENTAL $\Big(\mathrm{I}\Big)$:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}(t)} \longrightarrow \boxed{\mathrm{I} = d\bar{r}\cdot d\bar{r}} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{I} = \big(ds\big)^2 \geq 0 \\ ds = \sqrt{\mathrm{I}} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv} \quad \text{con} \quad \boxed{\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \bar{\gamma}'(t)\, dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathrm{I} = E\,\big(du\big)^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,\big(dv\big)^2 = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}} \quad (*)$$

(*) $E = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u$, $F = \bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v = \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_u$, $G = \bar{r}'_v \cdot \bar{r}'_v$. La matriz $\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ es SIM. y DEF. POS.

Distancias y ángulos sobre una superficie (II)

TENSOR MÉTRICO $\left(\underset{\sim}{G}\right)$:

Sean las curvas: $\bar{r}_1 = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}_1(t_1)}$ y $\bar{r}_2 = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}_2(t_2)}$ con $\bar{\gamma}_1(t_1) = \bar{\gamma}_2(t_2)$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} d\bar{r}_1 &= \underset{\sim}{H}\, d\bar{u}_1 \\ d\bar{r}_2 &= \underset{\sim}{H}\, d\bar{u}_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{aligned} d\bar{u}_1 &= \bar{\gamma}_1'\, dt_1 \\ d\bar{u}_2 &= \bar{\gamma}_2'\, dt_2 \end{aligned}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\bar{r}_1 \cdot d\bar{r}_2 = \left(d\bar{u}_1\right)^T \underset{\sim}{G}\; d\bar{u}_2 \quad \text{donde} \quad \underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{H}^T\, \underset{\sim}{H}} \quad (*)$$

(*) Nótese que $\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$, y que $dA = \sqrt{\det\left(\underset{\sim}{G}\right)}\; du\, dv$. Por tanto, $I = (d\bar{u})^T\, \underset{\sim}{G}\, d\bar{u}$.

El tensor métrico ($\underset{\sim}{G}$) juega el mismo papel que en un espacio Euclídeo, aunque ahora se plantea para calcular productos escalares de vectores infinitesimales. Además el tensor no es constante, sino que cambia con el punto de la superficie.

VECTOR TANGENTE:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}(t)} \longrightarrow \boxed{\bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}}$$

$$\Downarrow$$

$$d\bar{r} = \underset{\sim}{H}\; d\bar{u}, \qquad ds = \sqrt{\mathbf{I}}, \qquad \mathbf{I} = (d\bar{u})^T\, \underset{\sim}{G}\; d\bar{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{t} = \frac{\underset{\sim}{H}\; d\bar{u}}{\sqrt{(d\bar{u})^T\, \underset{\sim}{G}\; d\bar{u}}}}$$

Distancias y ángulos sobre una superficie (IV)

ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS:

Sean las curvas: $\bar{r}_1 = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}_1(t_1)}$ y $\bar{r}_2 = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}_2(t_2)}$ con $\bar{\gamma}_1(t_1) = \bar{\gamma}_2(t_2)$

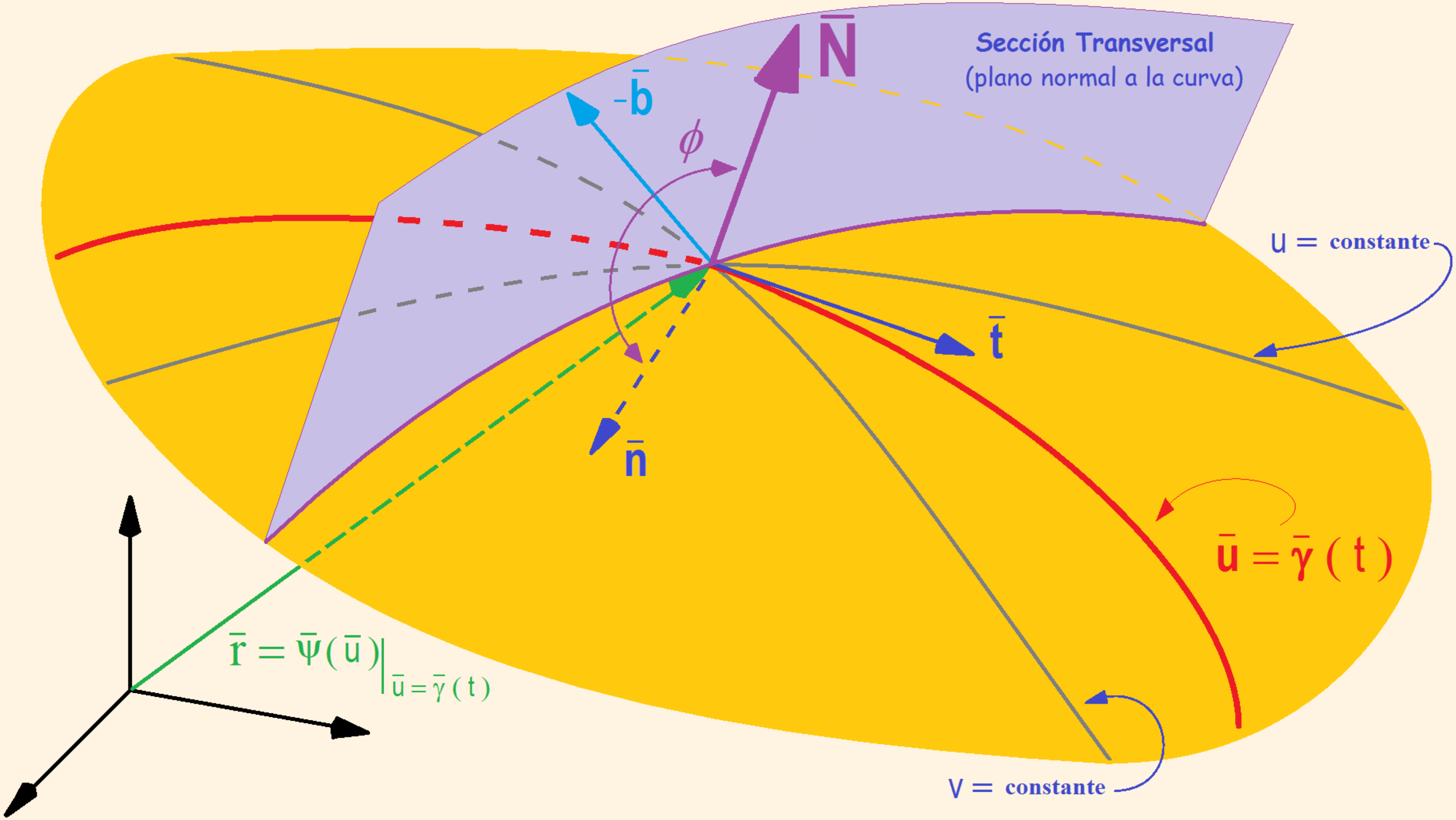
$$\Downarrow$$

$$\bar{t}_1 = \frac{\underset{\sim}{H}\ d\bar{u}_1}{\sqrt{\left(d\bar{u}_1\right)^T \underset{\sim}{G}\ d\bar{u}_1}},\quad \bar{t}_2 = \frac{\underset{\sim}{H}\ d\bar{u}_2}{\sqrt{\left(d\bar{u}_2\right)^T \underset{\sim}{G}\ d\bar{u}_2}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} d\bar{u}_1 = \bar{\gamma}_1'\ dt_1 \\ d\bar{u}_2 = \bar{\gamma}_2'\ dt_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\bar{t}_1 \cdot \bar{t}_2}{\left|\bar{t}_1\right|\ \left|\bar{t}_2\right|} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{\left(d\bar{u}_1\right)^T \underset{\sim}{G}\ d\bar{u}_2}{\sqrt{\left(d\bar{u}_1\right)^T \underset{\sim}{G}\ d\bar{u}_1}\ \sqrt{\left(d\bar{u}_2\right)^T \underset{\sim}{G}\ d\bar{u}_2}}}$$

Curvatura en una dirección determinada (I)



CURVA TRAZADA SOBRE UNA SUPERFICIE – SECCIÓN TRANSVERSAL

CURVATURA NORMAL Y CURVATURA GEODÉSICA:

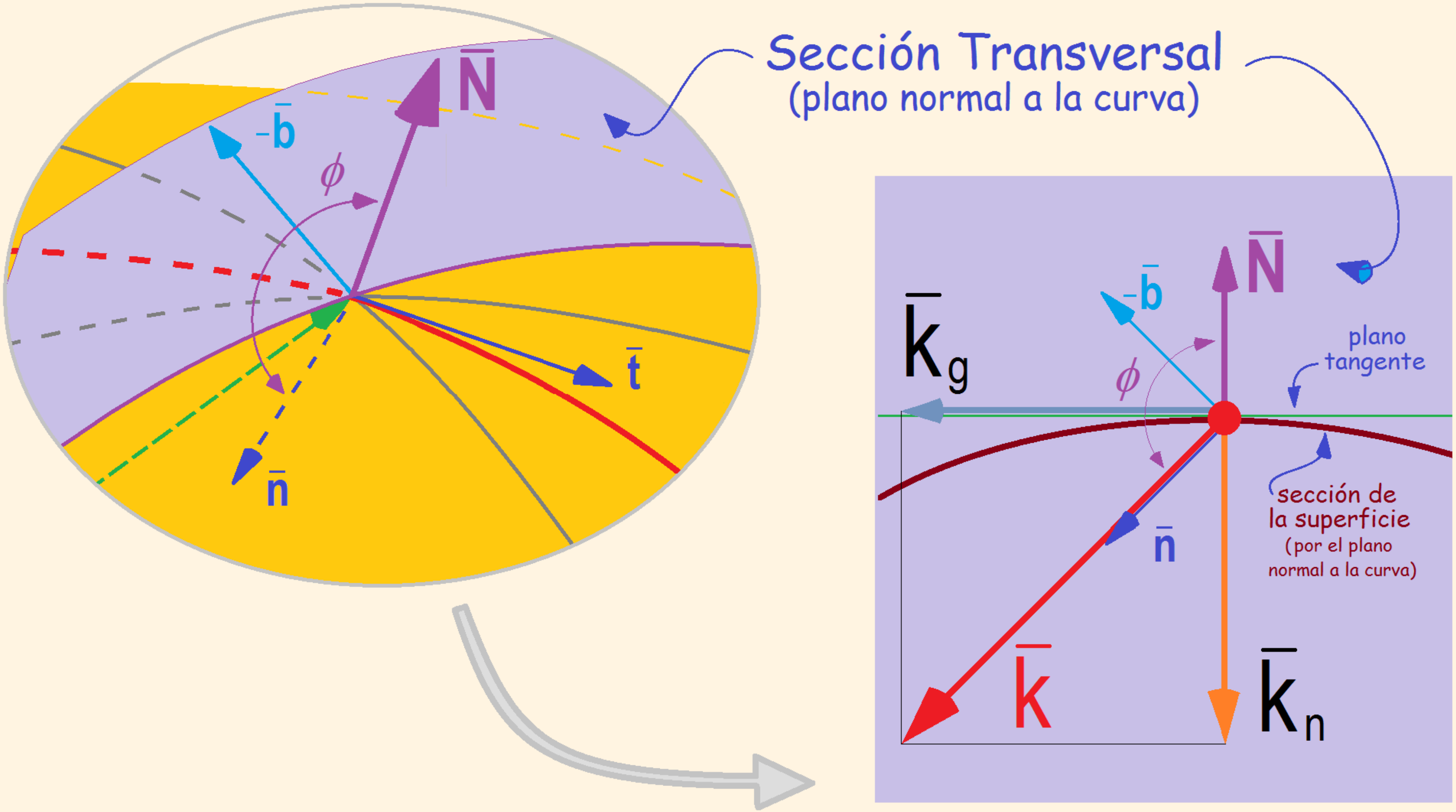
$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}(t)} \longrightarrow \bar{t} = \frac{d\bar{r}}{ds}, \qquad \boxed{\bar{k} = k\,\bar{n} = \frac{d\bar{t}}{ds}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{k} = \bar{k}_n + \bar{k}_g} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boxed{\bar{k}_n = k_n\,\bar{N}}, \quad \boxed{k_n = \bar{k}\cdot\bar{N}} & \leftarrow \textbf{curv. normal } (^*) \\ \boxed{\bar{k}_g = \bar{k} - \bar{k}_n}, \quad \boxed{k_g = |\bar{k}_g|} & \leftarrow \textbf{curv. geodésica} \end{cases}$$

(*) La curvatura normal tiene signo, pues $k_n = \bar{k}\cdot\bar{N} = k\,(\bar{n}\cdot N) \in [-k, +k]$.
El signo depende del sentido del vector $\bar{N}$ (que a su vez depende de la parametrización).

Curvatura en una dirección determinada (III)



CURVATURAS NORMAL (k_n) Y GEODÉSICA (k_g)

OBTENCIÓN DE LA CURVATURA NORMAL:

$$\bar{t} \cdot \bar{N} = 0, \quad \text{pues} \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{t} &= \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{h}_u \left(\frac{du}{ds}\right) + \bar{h}_v \left(\frac{dv}{ds}\right) \\ \bar{N} &= \frac{\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v}{\left|\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v\right|} \end{aligned} \right\} \Longrightarrow \quad \bar{t} \perp \bar{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{ds}\left(\bar{t} \cdot \bar{N}\right) = \frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \bar{N} + \bar{t} \cdot \frac{d\bar{N}}{ds} = (k\,\bar{n}) \cdot \bar{N} + \bar{t} \cdot \frac{d\bar{N}}{ds} = k_n + \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{d\bar{N}}{ds} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k_n = -\frac{d\bar{r} \cdot d\bar{N}}{d\bar{r} \cdot d\bar{r}} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}}, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I} &= d\bar{r} \cdot d\bar{r} && \leftarrow \text{1a. FORMA CUAD. FUND.} \\ \mathrm{II} &= -\, d\bar{r} \cdot d\bar{N} && \leftarrow \text{2a. FORMA CUAD. FUND.} \end{aligned} \right.$$

Curvatura en una dirección determinada (V)

SEGUNDA FORMA CUADRÁTICA FUNDAMENTAL $\left(\mathrm{II}\right)$:

$$\bar{r} = \bar{\psi}(\bar{u})\Big|_{\bar{u}=\bar{\gamma}(t)} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{II} = -\,d\bar{r}\cdot d\bar{N}$$

$$\Downarrow$$

$$d\bar{r} \;=\; \bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv\,, \qquad d\bar{N} \;=\; \bar{N}'_u\,du + \bar{N}'_v\,dv \qquad \text{con} \qquad \left\{\begin{matrix} du \\ dv \end{matrix}\right\} = \bar{\gamma}'(t)\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathrm{II} \;=\; e\left(du\right)^2 + 2\,f\,du\,dv + g\left(dv\right)^2 \;=\; \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} du \\ dv \end{matrix}\right\}} \quad (*)$$

(*) $e = -\bar{r}'_u\cdot\bar{N}'_u\,,\;\; f = -\frac{1}{2}\left(\bar{r}'_u\cdot\bar{N}'_v + \bar{r}'_v\cdot\bar{N}'_u\right)\,,\;\; g = -\bar{r}'_v\cdot\bar{N}'_v\,.$ La matriz $\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}$ es SIM.

Curvatura en una dirección determinada (VI)

CÁLCULO DE COEFICIENTES e, f y g de II:

1) $e = -\,\bar{r}'_u \cdot \bar{N}'_u$

$$\Longleftrightarrow \quad e = \bar{r}''_{uu} \cdot \bar{N} = \frac{[\,\bar{r}'_u,\ \bar{r}'_v,\ \bar{r}''_{uu}\,]}{|r'_u \wedge r'_v|} \longrightarrow e = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2\psi_3}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

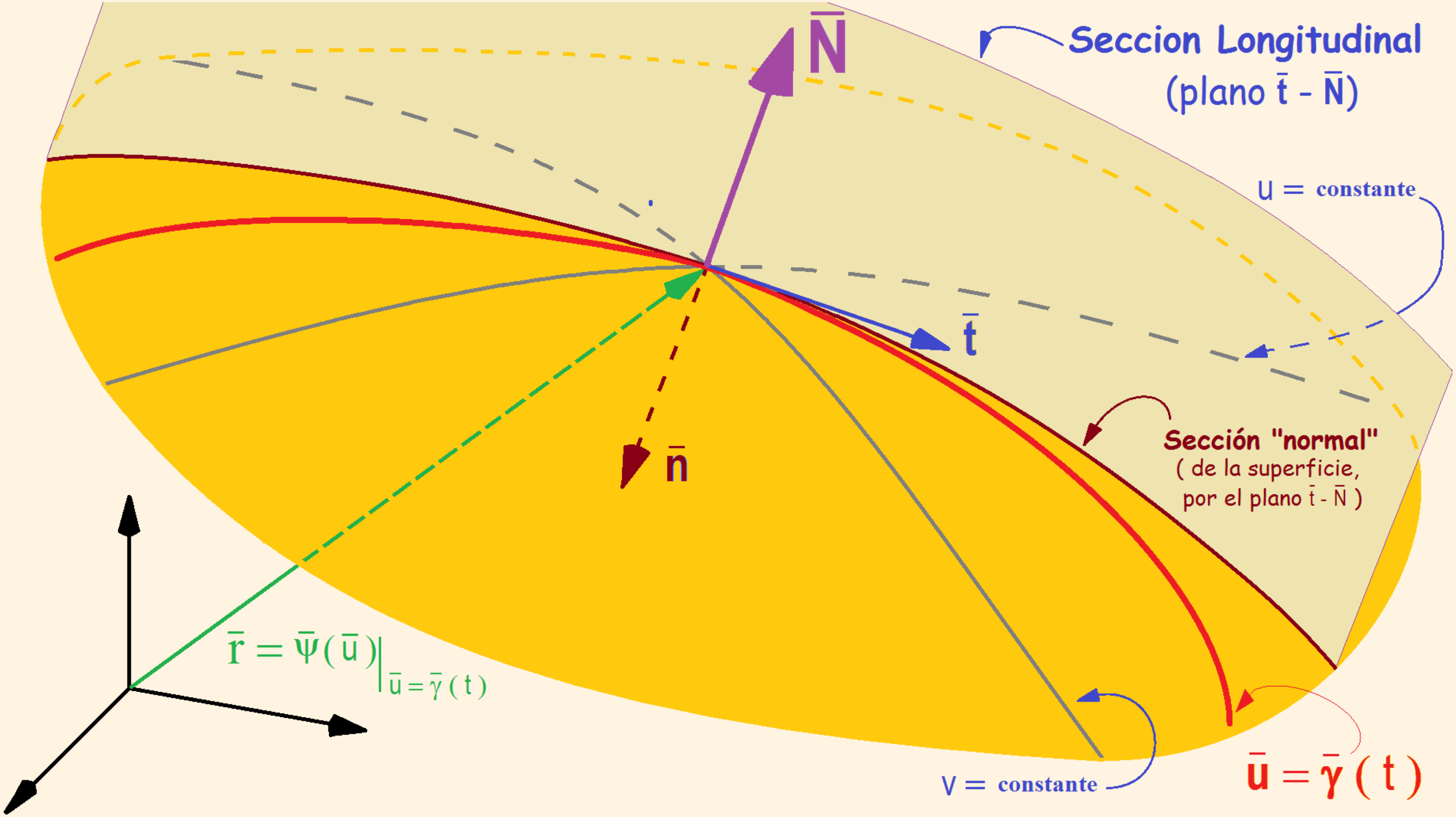
2) $f = -\frac{1}{2}\left(\bar{r}'_u \cdot \bar{N}'_v + \bar{r}'_v \cdot \bar{N}'_u\right)$

$$\Longleftrightarrow \quad f = \bar{r}''_{uv} \cdot \bar{N} = \frac{[\,\bar{r}'_u,\ \bar{r}'_v,\ \bar{r}''_{uv}\,]}{|r'_u \wedge r'_v|} \longrightarrow f = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial u\partial v} & \dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial u\partial v} & \dfrac{\partial^2\psi_3}{\partial u\partial v} \end{vmatrix}$$

3) $g = -\,\bar{r}'_v \cdot \bar{N}'_v$

$$\Longleftrightarrow \quad g = \bar{r}''_{vv} \cdot \bar{N} = \frac{[\,\bar{r}'_u,\ \bar{r}'_v,\ \bar{r}''_{vv}\,]}{|r'_u \wedge r'_v|} \longrightarrow g = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2\psi_3}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

Curvatura en una dirección determinada (VII)



CURVA TRAZADA SOBRE UNA SUPERFICIE – SECCIÓN LONGITUDINAL

TEOREMA DE MEUSNIER:

Se consideran las curvas trazadas sobre una superficie que tienen el mismo vector tangente ($+\bar{t}$ o $-\bar{t}$) en un punto dado. En este punto se cumple:

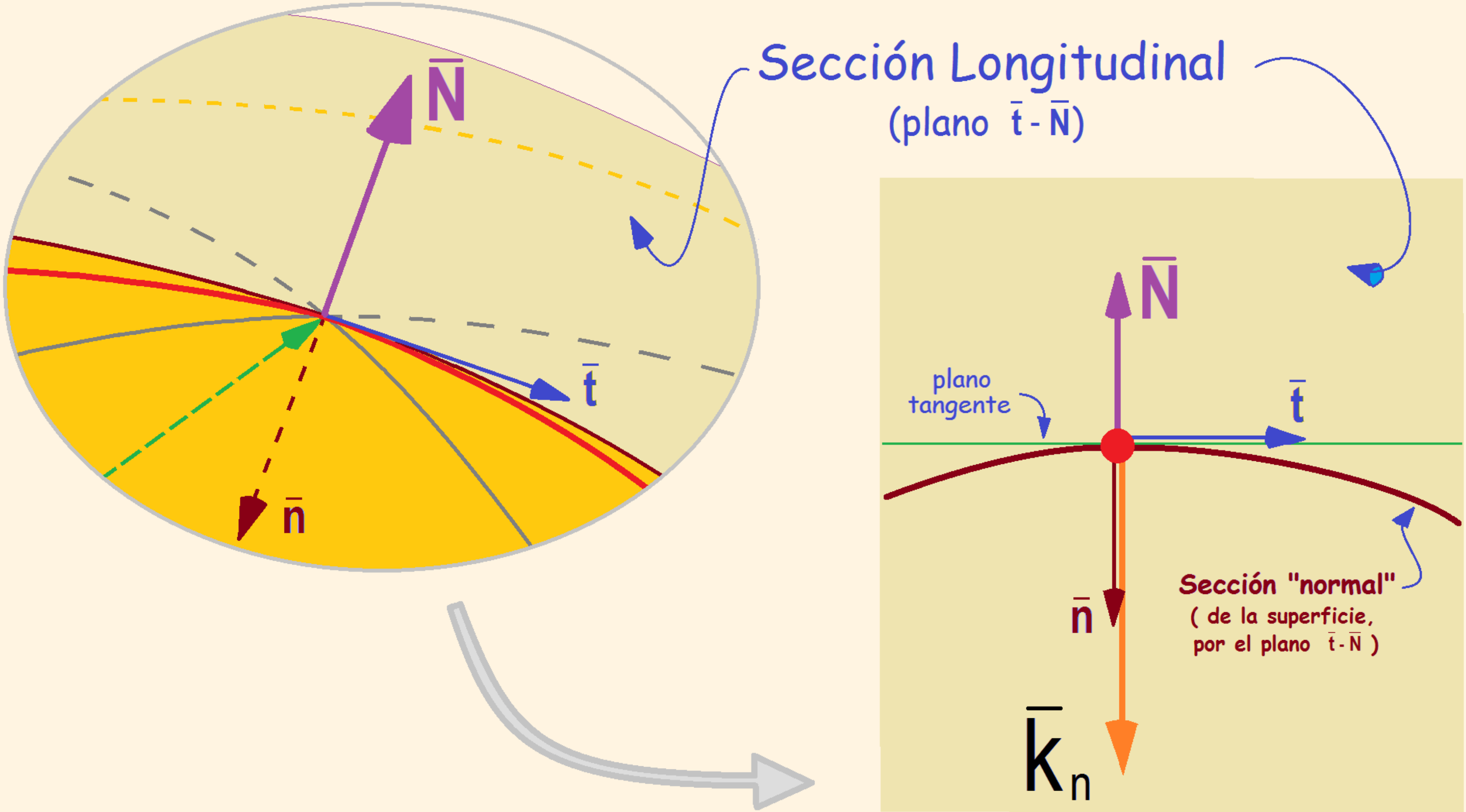
- Todas las curvas consideradas tienen la misma curvatura normal (k_n).
- El valor absoluto de la curvatura normal ($|k_n|$) es la curvatura de la **"sección normal"**. (*)
- La curvatura (k) de cualquiera de las curvas consideradas vale

$$\boxed{k = \frac{k_n}{cos(\phi)}}$$

donde $\cos(\phi) = \bar{n} \cdot \bar{N}, \quad \begin{cases} \bar{n} & \leftarrow \textbf{normal a la curva} \\ \bar{N} & \leftarrow \textbf{normal a la superficie} \end{cases}$

(*) La sección normal es la curva que se obtiene al cortar la superficie por el plano formado los vectores $\bar{t}$ y $\bar{N}$.

Curvatura en una dirección determinada (IX)



TEOREMA DE MEUSNIER

Curvatura en una dirección determinada (X)

OBTENCIÓN DE LA CURVATURA GEODÉSICA:

$k_g = |\bar{k}_g|$ con $\bar{k}_g = \bar{k} - \bar{k}_n,$ donde $\bar{k}_n = k_n \, \bar{N}$ con $k_n = \bar{k} \cdot \bar{N}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k_g = \left| \left[\ \bar{N} \ , \ \bar{t} \ , \ \dot{\bar{t}} \ \right] \right|}$$

Variación de la curvatura con la dirección (I)

CURVATURA NORMAL EN FUNCIÓN DE LA DIRECCIÓN:

$$\lambda = \frac{dv}{du}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k_n(\lambda) = \frac{e + 2\,f\,\lambda + g\,\lambda^2}{E + 2\,F\,\lambda + G\,\lambda^2}}$$

Variación de la curvatura con la dirección (II)

DIRECCIONES ASINTÓTICAS:

$$\boxed{k_n(\lambda) = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{e + 2\,f\;\lambda + g\;\lambda^2 = 0} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{-f + \sqrt{f^2 - eg}}{g} \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{-f - \sqrt{f^2 - eg}}{g} \end{array} \right. \qquad (*)$$

(*) Condición para que existan soluciones reales: $f^2 - eg \geq 0$.

Punto de inflexión: punto en el que $k_n(\lambda) = 0$ para algún λ.

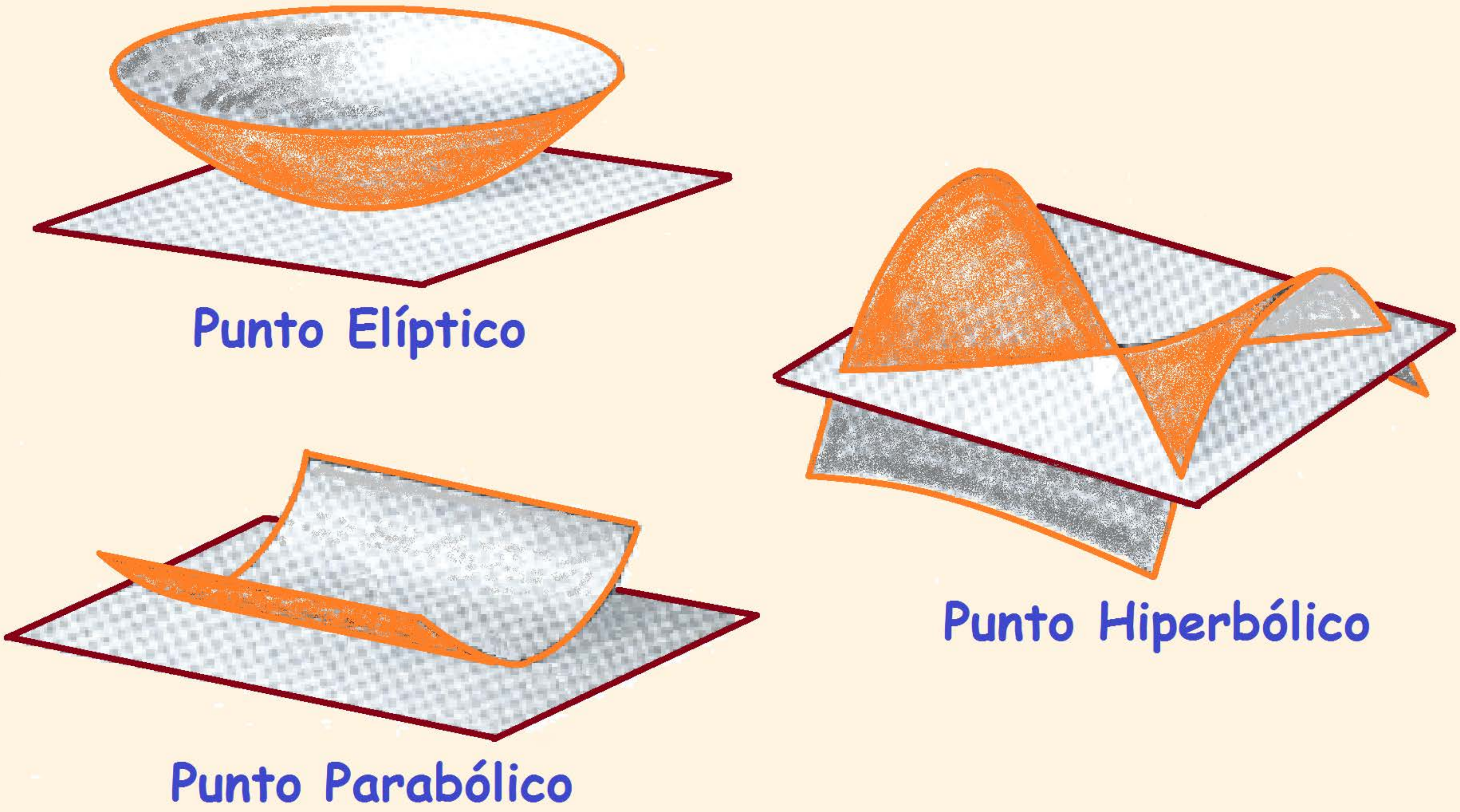
Líneas asintóticas: $e + 2\,f\left(\frac{dv}{du}\right) + g\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad k_n(\lambda) = 0$ para $\lambda = dv/du$.

Variación de la curvatura con la dirección (III)

CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE:

$$eg - f^2 \begin{cases} > 0 & \Longleftrightarrow \text{ N.º de D.A. = 0 } \Longleftrightarrow \text{ punto \textbf{Elíptico}} \\ = 0 & \Longleftrightarrow \text{ N.º de D.A. = 1 } \Longleftrightarrow \text{ punto \textbf{Parabólico}} \\ < 0 & \Longleftrightarrow \text{ N.º de D.A. = 2 } \Longleftrightarrow \text{ punto \textbf{Hiperbólico}} \end{cases}$$

Variación de la curvatura con la dirección (IV)



CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE

Variación de la curvatura con la dirección (V)

DIRECCIONES PRINCIPALES Y CURVATURAS PRINCIPALES:

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}\Big(k_n(\lambda)\Big) = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda & \longrightarrow \quad \textbf{dirección principal} \\ k_n(\lambda) & \longrightarrow \quad \textbf{curvatura principal} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \textbf{DP:} & (Fg - fG)\ \lambda^2 + (Eg - eG)\ \lambda + (Ef - eF) = 0 \\ \textbf{CP:} & (EG - F^2)\ k_n^2 + (2Ff - Eg - eG)\ k_n + (eg - f^2) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

(*) Siempre existen dos D.P. λ_1, λ_2 y sus correspondientes C.P. $k_1 = k_n(\lambda_1), k_2 = k_n(\lambda_2)$.

Las dos direcciones principales (es decir: sus vectores tangentes) son ORTOGONALES.

Líneas de curvatura: $(Fg - fG)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (Eg - eG)\frac{dv}{du} + (Ef - eF) = 0$ $\longleftarrow$dos familias ortog.

Variación de la curvatura con la dirección (VI)

EXPRESIONES EN FORMA DE DETERMINANTE:

Direcciones Principales:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{bmatrix} = 0$$

Curvaturas Principales:

$$\det \left(\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} - k_n \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \right) = 0$$

Variación de la curvatura con la dirección (VII)

SUMA Y PRODUCTO DE LAS DOS CURVATURAS PRINCIPALES:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{dos raíces: } x_1, x_2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = & -(b/a) \\ x_1 \;\; x_2 = & (c/a) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Direcciones Principales:

$$\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{Eg - eG}{Fg - fG}} \;, \qquad \boxed{\lambda_1\,\lambda_2 = \frac{Ef - eF}{Fg - fG}}$$

Curvaturas Principales:

$$\boxed{k_1 + k_2 = -\frac{2Ff - Eg - eG}{EG - F^2}} \;, \qquad \boxed{k_1\,k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}}$$

TEOREMA DE EULER:

$$\alpha \equiv \text{ángulo entre las direcciones} \begin{cases} \lambda \\ \lambda_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k_n(\lambda) \;=\; k_1 \;\cos^2(\alpha) \;+\; k_2 \;\mathrm{sen}^2(\alpha)}$$

CURVATURA MEDIA:

$$K_M = \frac{1}{2}\Big(k_1 + k_2\Big) = \frac{1}{2}\,\frac{Eg + eG - 2Ff}{EG - F^2}$$

CURVATURA TOTAL (O DE GAUSS):

$$K = k_1\,k_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (*)$$

(*) $EG - F^2 > 0 \implies (eg - f^2)\begin{cases} > 0 & \iff \text{punto } \textbf{Elíptico} \iff K > 0 \\ = 0 & \iff \text{punto } \textbf{Parabólico} \iff K = 0 \\ < 0 & \iff \text{punto } \textbf{Hiperbólico} \iff K < 0 \end{cases}$

Curvatura media y curvatura total (II)

SUPERFICIES MINIMALES:

la superficie tiene área mínima para un contorno dado

$$\Downarrow$$

la curvatura media es nula $\Longleftrightarrow$ $\boxed{K_M = 0}$ (*)

$$\Downarrow$$

las direcciones asintóticas son perpendiculares

(*) Se trata de un problema de Cálculo de Variaciones con dos variables independientes.
La demostración de que la curvatura media es nula no es trivial.
La demostración de que una curvatura media nula equivale a la ortogonalidad de las D.A. es trivial.
Ejemplos de superficies minimales: plano, catenoide (de revolución), helicoide (reglada), . . .

Curvatura media y curvatura total (III)

THEOREMA EGREGIUM (DE GAUSS):

$$K = \left(\frac{1}{EG-F^2}\right)^2 \left(\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E''_{vv} + F''_{uv} - \frac{1}{2}G''_{uu} & \frac{1}{2}E'_u & F'_u - \frac{1}{2}E'_v \\ F'_v - G'_u & E & F \\ \frac{1}{2}G'_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E'_v & G'_u \\ \frac{1}{2}E'_v & E & F \\ \frac{1}{2}G'_u & F & G \end{vmatrix} \right)$$

$$\Downarrow$$

la curvatura total puede calcularse a partir del tensor métrico (*)

(*) Luego depende únicamente de las propiedades métricas de la superficie.
$\Longrightarrow$ ¡El espacio en el que se halla inmersa la superficie es irrelevante!.
Nota: La demostración no es trivial. Puede encontrarse en
D.J. Struik, "Lectures on Classical Differential Geometry", pp. 105–112, Dover Pub. Inc. (1959)

Geodésicas (I)

CÁLCULO EN PARAMÉTRICAS:

Hallar: $\bar{f}(t) = \bar{\gamma}(t),$

que **PVEF** (*): $$\mathcal{S}\left[\bar{f}(t)\right] = \int_{t_\mathrm{I}}^{t_\mathrm{F}} \left(L(t, \bar{u}, \bar{p})\Big|_{\substack{\bar{u}=\bar{f}(t)\\ \bar{p}=\bar{f}'(t)}} \right) dt \,,$$

con: $$L(t, \bar{u}, \bar{p}) = \left(\bar{p}^T \, \underset{\sim}{G}(\bar{u}) \, \bar{p} \right)^{1/2}, \qquad (**)$$

verificando: $\bar{f}(t_\mathrm{I}) = \bar{u}_\mathrm{I}, \quad \bar{f}(t_\mathrm{F}) = \bar{u}_\mathrm{F}.$

(*) **PVEF** $\equiv$ produce un valor estacionario del funcional.

(**) $\Longrightarrow$ El funcional $\mathcal{S}\left[\bar{f}(t)\right]$ representa la distancia recorrida sobre la superficie a lo largo de la curva $\bar{u} = \bar{\gamma}(t)$.

Geodésicas (II)

CÁLCULO EN EXPLÍCITAS:

Hallar: $$f(u) = g(u),$$

que **PVEF** (*): $$\mathcal{S}\Big[f(u)\Big] = \int_{u_\mathrm{I}}^{u_\mathrm{F}} \left(L(u,v,p)\Big|_{\substack{v=f(u)\\ p=f'(u)}} \right) du \,,$$

con: $$L(u,v,p) = \Big(E(u,v) + 2F(u,v)\,p + G(u,v)\,p^2 \Big)^{1/2} \,, \qquad (**)$$

verificando: $$\bar{f}(u_\mathrm{I}) = \bar{v}_\mathrm{I}, \quad \bar{f}(u_\mathrm{F}) = \bar{v}_\mathrm{F}.$$

(*) **PVEF** $\equiv$ produce un valor estacionario del funcional.

(**) $\Longrightarrow$ El funcional $\mathcal{S}\Big[f(u)\Big]$ representa la distancia recorrida sobre la superficie a lo largo de la curva $v = f(u)$.

Geodésicas (III)

RELACIÓN CON LA CURVATURA GEODÉSICA:

se produce un valor extremo del funcional que representa
la distancia recorrida sobre la superficie a lo largo de la curva

$$\Downarrow$$

la curvatura geodésica es nula $\iff$ $\boxed{k_g = 0}$ (*)

$$\Downarrow$$

la normal a la curva ($\bar{n}$) y la normal a la superficie ($\bar{N}$) están alineadas

---

(*) La demostración de que la curvatura geodésica es nula no es trivial, pero es asequible.
La demostración de que una curvatura geodésica nula equivale al alineamiento de las normales es trivial.
Ejemplos de geodésicas: rectas sobre una superficie reglada, círculos máximos sobre una esfera...

Integral sobre una superficie

Dada la superficie $\Gamma \equiv \{\bar{r} = \bar{\psi}(u,v),\ (u,v) \in D\}$, (*)

CAMPO ESCALAR $f(\bar{r})$:

$$\iint_\Gamma f \;\, dA = \iint_{(u,v)\in D} \left(f(\bar{r})\Big|_{\bar{r}=\bar{\psi}(u,v)} \right) \; |\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v| \;\, du\, dv$$

CAMPO VECTORIAL $\bar{f}(\bar{r})$:

$$\iint_\Gamma \bar{f} \cdot d\bar{A} = \iint_\Gamma \bar{f} \cdot \bar{N} \;\, dA = \iint_{(u,v)\in D} \left(\bar{f}(\bar{r})\Big|_{\bar{r}=\bar{\psi}(u,v)} \right) \cdot (\bar{h}_u \wedge \bar{h}_v) \;\, du\, dv$$

(*) Si la superficie es cerrada se utiliza el símbolo $\oiint$.