CÁLCULO DE VARIACIONES: NOTACIÓN Y FORMULARIO

F. Navarrina, L. Ramírez & GMNI

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fermin.navarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

Lemas fundamentales del Cálculo de Variaciones (I)

PRINCIPIO DE LOCALIZACIÓN: [Se supone que $\psi(\bar{x}) \in \mathcal{C}^{\circ}(\Omega)$]

$$\int_{\Omega} \psi(\bar{x})\, \omega(\bar{x})\, d\Omega = 0 \quad \forall \omega(\bar{x}) \in H_{\omega} \qquad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\psi(\bar{x}) = 0 \quad \forall x \in \mathring{\Omega}}$$

(*) El principio se sostiene (**NO TRIVIAL**) cuando

$$H_{\omega} = \left\{ \omega(\bar{x}) \right\} \quad \text{tales que} \quad \begin{cases} \omega(\bar{x}) = 0 & \forall \bar{x} \in \partial\Omega \\ \omega(\bar{x}) \in \mathcal{C}^{n}(\Omega) \end{cases}$$

PRINCIPIO DE RESIDUOS PONDERADOS:

$$\psi(\bar{x}) = 0 \quad \forall x \in \mathring{\Omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \psi(\bar{x})\, \omega(\bar{x})\, d\Omega = 0 \quad \forall \omega(\bar{x}) \in H_{\omega}} \qquad (*)$$

(*) El principio se sostiene (**TRIVIAL**) cuando

$$H_{\omega} = \left\{ \omega(\bar{x}) \right\} \quad \text{tales que} \quad \begin{cases} \omega(\bar{x}) = 0 & \forall \bar{x} \in \partial\Omega \\ \omega(\bar{x}) \in \mathcal{C}^{n}(\Omega) \end{cases}$$

PROBLEMA FUNDAMENTAL:

Hallar: $f(x) = u(x) \in H_u,$

que **PVEF** (*): $\mathcal{J}\Big[f(x)\Big] = \int_{x_a}^{x_b} \left(L(x, y, p)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)}} \right) dx$,

verificando: $f(x_a) = y_a, \quad f(x_b) = y_b.$

(*) **PVEF** $\equiv$ produce un valor estacionario del funcional

PROBLEMA FUNDAMENTAL CON VARIAS INCÓGNITAS:

Hallar: $\bar{f}(x) = \bar{u}(x) \in H_u,$

que **PVEF** (*): $\mathcal{J}\left[\bar{f}(x)\right] = \int_{x_a}^{x_b} \left(L(x, \bar{y}, \bar{p})\Big|_{\substack{\bar{y}=\bar{f}(x) \\ \bar{p}=\bar{f}'(x)}} \right) dx,$

verificando: $\bar{f}(x_a) = \bar{y}_a, \quad \bar{f}(x_b) = \bar{y}_b.$

(*) **PVEF** $\equiv$ produce un valor estacionario del funcional

ECUACIÓN DE EULER–LAGRANGE:

$$f(x) = u(x) \quad \text{produce un valor estacionario de} \quad \mathcal{J}\Big[f(x)\Big]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\left(\left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{\substack{y=u(x)\\ p=u'(x)}} \right) - \frac{d}{dx}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial p}\right|_{\substack{y=u(x)\\ p=u'(x)}} \right) = 0}$$

ECUACIÓN DE EULER–LAGRANGE CON VARIAS INCÓGNITAS:

$\bar{f}(x) = \bar{u}(x)$ produce un valor estacionario de $\mathcal{J}\left[\bar{f}(x)\right]$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\left. \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} \right|_{\substack{\bar{y}=\bar{u}(x) \\ \bar{p}=\bar{u}'(x)}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \bar{p}} \right|_{\substack{\bar{y}=\bar{u}(x) \\ \bar{p}=\bar{u}'(x)}} \right) = \bar{0}^{\,T}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\left. \frac{\partial L}{\partial y_i} \right|_{\substack{\bar{y}=\bar{u}(x) \\ \bar{p}=\bar{u}'(x)}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\left. \frac{\partial L}{\partial p_i} \right|_{\substack{\bar{y}=\bar{u}(x) \\ \bar{p}=\bar{u}'(x)}} \right) = 0 \qquad \forall i$$

IDENTIDAD DE BELTRAMI:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) p \right] \Bigg|_{\substack{y=u(x)\\ p=u'(x)}} = k}$$

IDENTIDAD DE BELTRAMI CON VARIAS INCÓGNITAS:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[L - \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{p}} \right) \bar{p} \right] \Bigg|_{\substack{\bar{y}=\bar{u}(x) \\ \bar{p}=\bar{u}'(x)}} = k$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[L - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial p_i} \right) p_i \right] \Bigg|_{\substack{\bar{y}=\bar{u}(x) \\ \bar{p}=\bar{u}'(x)}} = k$$

PRINCIPIO DE HAMILTON (ACCIÓN ESTACIONARIA):

Sean
$$\begin{cases} \bar{q}(t) \equiv \text{coordenadas generalizadas de un sistema dinámico} \\ \boxed{L(t,\bar{q},\dot{\bar{q}}) = T - V}, \quad \text{con} \begin{cases} T = \text{energía cinética} \\ V = \text{energía potencial} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\bar{\alpha}(t) = \bar{u}(t)$ hace estacionaria la **ACCIÓN**

$$\mathcal{A}\Big[\bar{\alpha}(t)\Big] = \int_{t_o}^{t_1} \left(L(t,\bar{q},\bar{p})\Big|_{\substack{\bar{q}=\bar{\alpha}(t) \\ \bar{p}=\dot{\bar{\alpha}}(t)}} \right) dt$$

MECÁNICA DE LAGRANGE:

Hallar: $\bar{\alpha}(t) = \bar{u}(t) \in H_u,$

que **PVEF** (*): $$\mathcal{A}\Big[\bar{\alpha}(t)\Big] = \int_{t_\circ}^{t_1} \left(L(t, \bar{q}, \bar{p})\Big|_{\substack{\bar{q}=\bar{\alpha}(t) \\ \bar{p}=\dot{\bar{\alpha}}(t)}} \right) dt,$$

verificando: $\bar{\alpha}(t_\circ) = \bar{q}_\circ, \quad \dot{\bar{\alpha}}(t_\circ) = \bar{p}_\circ.$

(*) **PVEF** $\equiv$ produce un valor estacionario del funcional

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LAGRANGE:

$$\bar{\alpha}(t) = \bar{u}(t) \quad \text{produce un valor estacionario de} \quad \mathcal{A}\Big[\bar{\alpha}(t)\Big]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\left(\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{\substack{\bar{q}=\bar{u}(t) \\ \bar{p}=\dot{\bar{u}}(t)}} \right) - \frac{d}{dx} \left(\left.\frac{\partial L}{\partial p_i}\right|_{\substack{\bar{q}=\bar{u}(t) \\ \bar{p}=\dot{\bar{u}}(t)}} \right) = 0 \qquad \forall i}$$

Tratamiento de restricciones de tipo integral (I)

PROBLEMA CON RESTRICCIONES DE TIPO INTEGRAL:

Hallar: $f(x) = u(x) \in H_u,$

que **PVEF** (*): $\mathcal{J}\Big[f(x)\Big] = \int_{x_a}^{x_b} \left(L(x,y,p)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)}} \right) dx$,

verificando: $f(x_a) = y_a, \quad f(x_b) = y_b,$

$$\mathcal{H}\Big[f(x)\Big] = \int_{x_a}^{x_b} \left(h(x,y,p)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)}} \right) dx = \eta \ .$$

(*) **PVEF** $\equiv$ produce un valor estacionario del funcional

Tratamiento de restricciones de tipo integral (II)

PLANTEAMIENTO CON MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$$\widehat{L}(x,y,p,\lambda) = L(x,y,p) - \lambda\, h(x,y,p)$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{\mathcal{J}}\Big[f(x)\Big] = \int_{x_a}^{x_b} \left(\widehat{L}(x,y,p,\lambda)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)}} \right) dx$$

PROBLEMA CON RESTRICCIONES ORDINARIAS:

Hallar: $f(x) = u(x) \in H_u,$

que **PVEF** (*): $\mathcal{J}\Big[f(x)\Big] = \displaystyle\int_{x_a}^{x_b} \left(L(x,y,p)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)}} \right) dx,$

verificando: $f(x_a) = y_a, \quad f(x_b) = y_b,$

$$g(x,y,p)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)}} = 0 \quad \forall x \in \big(x_a, x_b\big).$$

(*) **PVEF** $\equiv$ produce un valor estacionario del funcional

PLANTEAMIENTO CON MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$$\widehat{L}(x, y, p, \lambda) = L(x, y, p) - \lambda\, g(x, y, p)$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{\mathcal{J}}\left[f(x)\right] = \int_{x_a}^{x_b} \left(\widehat{L}(x, y, p, \lambda)\Big|_{\substack{y=f(x)\\ p=f'(x)\\ \lambda=\lambda(x)}} \right) dx$$