Fundamentos de Mecánica Computacional

PROBLEMAS DE INTEGRACIÓN TRIPLE

1.– Hallar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^6 \int_0^{12-2y} \int_0^{4-2y/3-x/3} x \; dz\, dx\, dy$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_2^3 \int_0^1 (xy+yz) \; dz\, dy\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_{y^2}^{1-z} dx\, dy\, dz$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} z\rho\sqrt{16-\rho^2} \; d\rho\, dz\, d\theta$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} z\rho \; dz\, d\rho\, d\theta$ **f)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^5 r^4 \operatorname{sen}\varphi \; dr\, d\varphi\, d\theta$

g) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{2a\cos\varphi} r^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \; dr\, d\varphi\, d\theta$

2.– Hallar las siguientes integrales y dibujar aproximadamente el recinto de integración:

a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 \int_0^{x+y} 2xy \; dz\, dy\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^2 \int_0^{x+2y} (x-2z) \; dz\, dx\, dy$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} x} (y-x) \; dz\, dx\, dy$

3.– Calcular las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\iiint_R z \; dV$ siendo R la región del primer octante limitada por el cilindro $y^2+z^2=4$, y por los planos $x+y=2$, $2y+x=6$.

b) $\displaystyle\iiint_R (x^2+y^2) \; dV$ siendo R la región limitada por el paraboloide $x^2+y^2=9-z$, y por el plano $z=0$.

c) $\displaystyle\iiint_R z \; dV$ siendo R la región del primer octante interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

d) $\displaystyle\iiint_R x^2yz^3 \; dV$ siendo R la región comprendida entre los planos XZ, XY, y los cilindros $y^2=ax-x^2$, $z^2=4ax$.

e) $\displaystyle\iiint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \; dV$ siendo S la región interior a una esfera de radio a centrada en el origen, comprendida entre los planos $z=0$, $z=b$.

4.– Usando integrales triples calcular los volúmenes siguientes:

a) Limitada por las superficies $z = 2x^2 + y^2$, $z = 4 - y^2$.

b) Interior a $(x-2)^2 + y^2 = 4$, limitado superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente por $z = 0$.

c) Interior a $x^2 + y^2 = 9$, sobre $z = 0$, bajo $x + z = 4$.

d) Encerrado entre los planos coordenados y el plano $6x + 4y + 3z = 12$.

e) Interior a $x^2 + y^2 = 4x$, sobre $z = 0$, bajo $x^2 + y^2 = 4z$.

f) Interior a $x^2 + y^2 = 16$, sobre $z = 0$ y bajo $y = 2z$.

g) Limitado por el paraboloide $(x-1)^2 + (y-1)^2 = z$ y el plano $2x + 2y + z = 6$.

h) Limitado por las superficies $z = y^2 + 2$, $z = 3y^2 + 2$ y los planos $x = 0$, $x = 3$, $z = 14$.

i) Interior al hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, exterior al paraboloide elíptico $x^2 + y^2 = z - 1$, entre los planos $z = 0$, $z = 5$.

j) Encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el paraboloide elíptico $x^2 + 4(y^2 - z) = 0$ y el plano $z = 0$.

k) Interior al toro de ecuación $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$, con $a > b$.

l) Limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$, con $a > 0$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

m) Interior a $r = 2a \operatorname{sen} \varphi$, siendo (r, θ, φ) las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$.

5.– Calcular la integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) \; dz \, dy \, dx$$

usando un cambio a coordenadas esféricas.
