Fundamentos de Mecánica Computacional

PROBLEMAS DE INTEGRACIÓN DOBLE

1.– Hallar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2 dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 (x+y)\;dx\,dy$

c) $\displaystyle\int_2^4\int_1^2 (x^2+y^2)\;dy\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\;dy\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{y^{3/2}} \frac{x}{y^2}\;dx\,dy$

f) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\;dy\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} xe^y\;dy\,dx$

h) $\displaystyle\int_2^4\int_y^{8-y} y\;dx\,dy$

i) $\displaystyle\int_0^{\arctan(3/2)}\int_0^{2\sec\theta} \rho\;d\rho\,d\theta$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^2\cos\theta\;d\rho\,d\theta$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\tan\theta\sec\theta} \rho^3\cos^2\theta\;d\rho\,d\theta$

l) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} \rho^3\cos^2\theta\;d\rho\,d\theta$

2.– Resolver las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\iint_R dA$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por $y^2=x^3$, $y=x$.

b) $\displaystyle\iint_R dA$, siendo R la región situada a la izquierda de $x=1$, entre las curvas $y=2x$, $y=x^2$.

c) $\displaystyle\iint_R x^2\;dA$, siendo R la región del primer cuadrante limitada por $xy=16$, $y=x$, $x=8$, $y=0$.

d) $\displaystyle\iint_R e^{x^2}\;dA$, siendo R la región limitada por $x=3y$, $x=3$, $y=0$.

e) $\displaystyle\iint_R x\;dA$, siendo R la región limitada por $y=x^2$, $y=x^3$.

f) $\displaystyle\iint_R y\;dA$, siendo R la misma región que en el apartado anterior.

g) $\displaystyle\iint_R x^2\;dA$, siendo R la región limitada por $y=x$, $y=2x$, $x=2$.

h) $\displaystyle\iint_R dA$, siendo R la región limitada por $2y=x^2$, $y=3x$, $x+y=4$, con $x\in[0,2]$, $y\geq 0$.

i) $\displaystyle\iint_R y\;dA$, siendo R la región limitada por $y^2=4x$, $y^2=5-x$, por encima de $y=0$.

j) $\displaystyle\iint_R xy^2\;dA$, siendo R la región limitada por $y^2=2px$, $x=p/2$.

3.– En el problema **1**, desde el apartado **a)** hasta el **h)**, invertir el orden de integración y calcular la integral resultante.

4.– Realizando un cambio de variable adecuado, calcular:

a) $\displaystyle\iint_R e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}\, dA$, siendo R el triángulo formado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

b) $\displaystyle\iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA$, siendo R el círculo de radio 1 y centro el origen de coordenadas.

c) $\displaystyle\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, siendo R el círculo de radio a y centro el origen de coordenadas.

d) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, siendo R el área limitada por $\pi^2 = x^2 + y^2$; $4\pi^2 = x^2 + y^2$.

5.– Calcular las áreas siguientes utilizando integrales dobles

a) Limitada por $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$.

b) Limitada por $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$.

c) Limitada por $x^2 = 4y$, $8y = x^2 + 16$.

d) Limitada por $y = 2x - x^2$, $y = 3x^2 - 6x$.

e) Encerrada por el lazo $y^2 = x^2(2 - x)$.

f) Limitada por $xy = 4$, $x + y = 5$.

g) Encerrada por $(x - y)^2 + x^2 = a^2$.

h) Exterior a $\rho = 2$ e interior a $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

i) Exterior a $\rho^2 = 8\cos 2\theta$ e interior a $\rho = 4\operatorname{sen}\theta$.

j) Limitada por $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geq a^2$.

6.– Usando integrales dobles calcular los volúmenes limitados por las superficies siguientes:

a) $z = 0$, $z = x + y + 2$, $x^2 + y^2 = 16$, $x > 0$, $y > 0$.

b) $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 4$, $z = 0$.

c) $x^2 + 4y^2 = z$, $z = 0$, $y^2 = x$, $x^2 = y$.

d) $x^2 + y^2 = 4z$, $x^2 + y^2 = 8y$, $z = 0$.

e) $x^2 + z = 9$, $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

f) $xy = 4z$, $y = x$, $x = 4$, $z = 0$.

g) $x^2 + y^2 = 25$, $y = z$, $x = 0$, $z = 0$.

h) $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + z^2 = 16$.

i) Interior a $\rho = 2$ y exterior a $z^2 = \rho^2$.

j) Común a $\rho^2 + z^2 = a^2$ y a $\rho = a\operatorname{sen}\theta$.

7.– Calcular el volumen extraído al hacer un agujero de radio a, a través de una esfera de radio $2a$, siendo el eje del agujero un diámetro de la esfera.

8.– Calcular el volumen generado al girar un pétalo de $\rho = \operatorname{sen} 2\theta$, en torno a uno cualquiera de los ejes.
