FUNDAMENTOS DE MECÁNICA COMPUTACIONAL. INTRODUCCIÓN: CAMPOS EN MEDIOS CONTINUOS

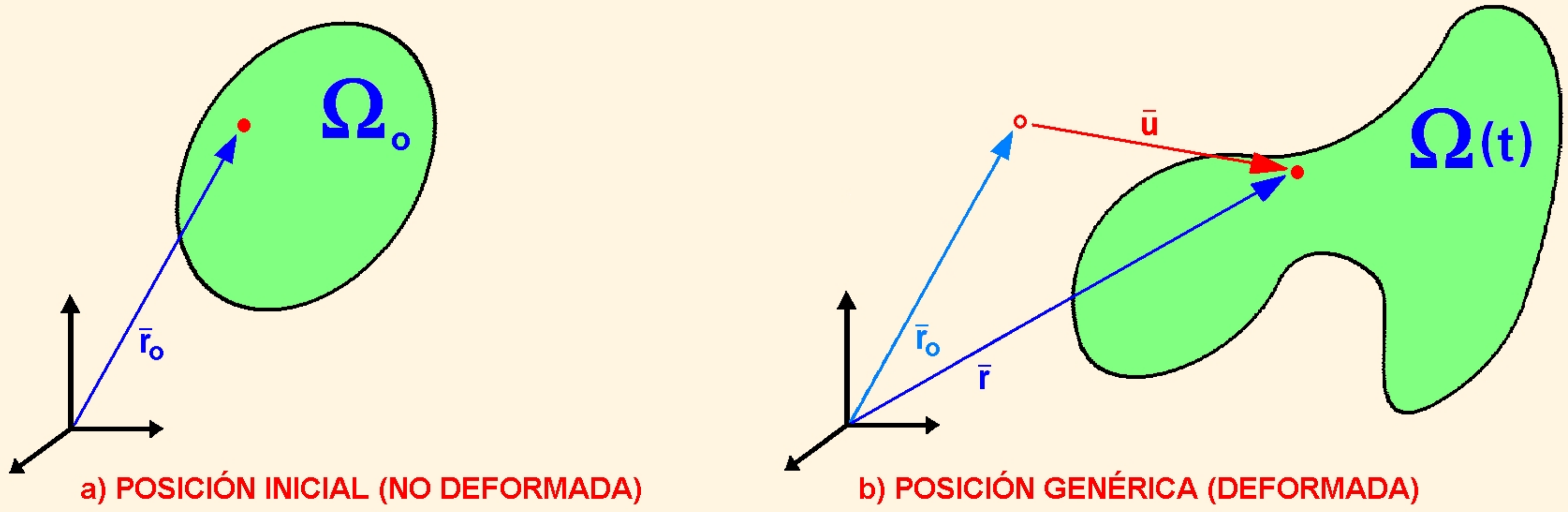
F. Navarrina, L. Ramírez, R. Martul & GMNI

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fermin.navarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

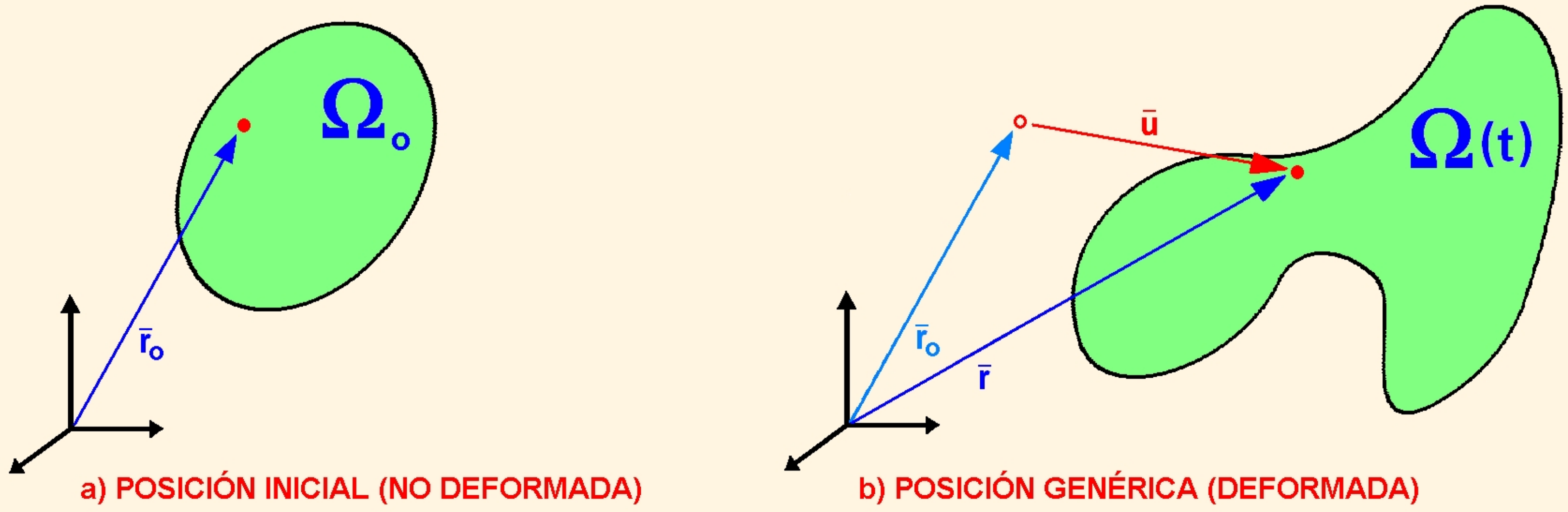
ÍNDICE



POSICIÓN (de una partícula):

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{r} = \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t), & \underbrace{\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}_{\text{MOVIMIENTO}} = \bar{r}_0 + \underbrace{\bar{u}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}_{\text{DESPLAZAMIENTO}}, \\ \Omega(t) = \bar{r}_{\mathcal{L}}(\Omega_0, t). & \longleftarrow \text{DOMINIO MATERIAL} \end{array}\right.$$

Movimiento del Medio (II)



VELOCIDAD (de una partícula):

$$\bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_{\mathcal{L}}}{\partial t}.$$

TENSOR GRADIENTE DE MOVIMIENTOS:

$$\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right] = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}, \quad \underset{\sim}{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{u}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right], \qquad (*)$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \det(\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}). \qquad (**)$$

(*) $\underset{\sim}{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}$ es el **TENSOR GRADIENTE DE DESPLAZAMIENTOS**.

(**) Se exige que $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}^{-1}$.

DESCRIPCIÓN DE UNA MAGNITUD

$$\psi \quad \longleftarrow \quad \begin{cases} \psi_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) & \longleftrightarrow \\ \psi_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t) & \longleftrightarrow \end{cases}$$

Descripción LAGRANGIANA,

Descripción EULERIANA.

EQUIVALENCIA:

$$\boxed{\psi_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \psi_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t)\Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}.}$$

Ejemplo: Velocidad

$$\bar{a}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \bar{a}_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t)\Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t)}.$$

DERIVADAS TEMPORALES:

$$\frac{\partial \psi_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \left.\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial t}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)} + \left.\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)} \frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \left.\left[\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\, \bar{a}_{\mathcal{E}}\right]\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)}.$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \left.\left[\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\, \bar{a}_{\mathcal{E}}\right]\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)}.} \qquad (*)$$

(*) Al término de la derecha de esta expresión se le llama vulgarmente “derivada material”.

Derivadas Temporales y Espaciales (II)

DERIVADAS ESPACIALES:

$$\frac{\partial \psi_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0} = \left.\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)} \left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right] \iff \frac{\partial \psi_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0} \left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right]^{-1} = \left.\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)}.$$

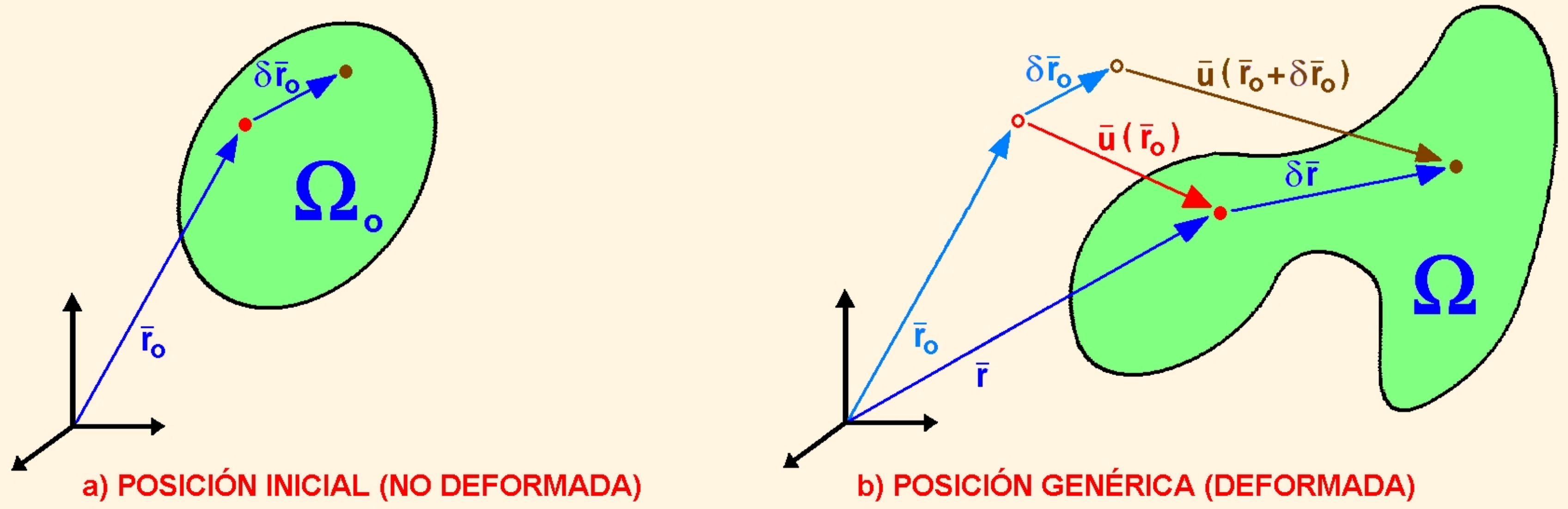
$$\boxed{\frac{\partial \psi_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0} = \left.\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)} \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}} \iff \frac{\partial \psi_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0} \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}^{-1} = \left.\frac{\partial \psi_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)}.}$$

DERIVADA TEMPORAL DEL GRADIENTE DE MOVIMIENTOS:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right] = \frac{\partial}{\partial \bar{r}_0}\left(\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \bar{a}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}.$$

$$\boxed{\frac{\partial \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}.}$$

Deformación del Continuo (I)



Movimientos relativos del medio en el entorno de un punto:

$$\delta\bar{r} = \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0 + \delta\bar{r}_0, t) - \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right] \delta\bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}_0\|^2),$$

Luego,

$$\delta\bar{r} = \underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}\, \delta\bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}_0\|^2), \quad \text{con } \underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{r}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right] = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{J}_{\mathcal{L}}, \quad \underset{\sim}{J}_{\mathcal{L}} = \left[\frac{\partial \bar{u}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\right].$$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

- **El tensor $\underset{\sim}{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}}$ contiene toda la información relativa al cambio de**
  - **VOLUMEN**
  - **ORIENTACIÓN**
  - **FORMA**

entre los instantes $t = 0$ y t en el entorno de un punto. (*)

(*) Información necesaria para definir el estado tenso-deformacional de un sólido.

Deformación del Continuo (III)

PLANTEAMIENTO INCREMENTAL:

El tensor $\underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}$ define la transformación

$$\underbrace{\delta\bar{r}_0}_{\text{(instante } t=0)} \longmapsto \underbrace{\delta\bar{r}\Big|_t}_{\text{(instante } t)} = \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0 + \delta\bar{r}_0, t) - \bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t).$$

Buscamos la ecuación que describe la transformación incremental

$$\boxed{\underbrace{\delta\bar{r}\big|_t}_{\text{(instante } t)} \longmapsto \underbrace{\delta\bar{r}\big|_{t+dt}}_{\text{(instante } t+dt)}.}$$

Deformación del Continuo (IV)

Puesto que

$$\delta\bar{r} = \underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}\,\delta\bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}_0\|^2) \implies \begin{cases} \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}\|) = \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}_0\|), & \text{(tomando módulos)} \\ \dfrac{\partial\delta\bar{r}}{\partial t} = \dfrac{\partial\underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}}{\partial t}\,\delta\bar{r}_0 + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}_0\|^2), & \text{(derivando respecto a } t\text{)} \\ \delta\bar{r}_0 = \underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}^{-1}\,\delta\bar{r} + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}\|^2), & \text{(invirtiendo)} \end{cases}$$

podemos escribir

$$\frac{\partial\delta\bar{r}}{\partial t} = \left[\frac{\partial\underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}}{\partial t}\,\underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}^{-1}\right]\,\delta\bar{r} + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}\|^2).$$

Por tanto,

$$\boxed{\delta\bar{r}\big|_{t+dt} = \left(\underset{\sim}{I} + \left[\frac{\partial\underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}}{\partial t}\,\underset{\sim}{F}_{\mathcal{L}}^{-1}\right]dt\right)\,\delta\bar{r}\big|_{t} + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}\|^2).}$$

TENSOR GRADIENTE DE VELOCIDAD (*)

$$\underset{\sim}{l} \longleftarrow \begin{cases} \boxed{\underset{\sim}{l}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \left[\dfrac{\partial \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}}{\partial t}\, \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}^{-1}\right]} & \longleftrightarrow \quad \textbf{Descripción LAGRANGIANA,} \\ \boxed{\underset{\sim}{l}_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t) = \left[\dfrac{\partial \bar{a}_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\right]} & \longleftrightarrow \quad \textbf{Descripción EULERIANA.} \end{cases}$$

(*) Las dos expresiones corresponden al mismo tensor, ya que

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0} \implies \underset{\sim}{l}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0, t) = \frac{\partial \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}}{\partial t}\, \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}^{-1} = \frac{\partial \bar{a}_{\mathcal{L}}}{\partial \bar{r}_0}\, \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{\mathcal{L}}^{-1} = \left.\frac{\partial \bar{a}_{\mathcal{E}}}{\partial \bar{r}}\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)} = \left.\underset{\sim}{l}_{\mathcal{E}}(\bar{r}, t)\right|_{\bar{r}=\bar{r}_{\mathcal{L}}(\bar{r}_0,t)},$$

lo que justifica el nombre.

Deformación del Continuo (VI)

Movimientos relativos del medio en forma incremental:

En función del tensor $\underset{\sim}{l}$ podemos escribir

$$\boxed{\delta\bar{r}\big|_{t+dt} = \Big[\, \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{l}\, dt \,\Big]\ \delta\bar{r}\big|_{t} + \mathcal{O}(\|\delta\bar{r}\|^2),}$$

lo que indica que

♣ la transformación incremental es de tipo INFINITESIMAL.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

- **El tensor $\underset{\sim}{l}$ contiene toda la información relativa al cambio de**
  - **VOLUMEN**
  - **ORIENTACIÓN**
  - **FORMA**

entre los instantes t y $t + dt$ en el entorno de un punto. (*)

(*) Información necesaria para definir el estado tenso-deformacional de un fluido.

Cuestiones de especial interés

1. **¿Cuál de las descripciones (Lagrangiana o Euleriana) es preferible?**
   - ▷ Sólidos: **LAGRANGIANA** (desplazamiento $\longrightarrow$ estado tenso-deformacional)
   - ▷ Fluidos: **EULERIANA** (densidad, velocidad y presión $\longrightarrow$ estado tensional)
2. **¿Cómo se extrae la información necesaria para definir el estado tensional de un sólido a partir del gradiente de desplazamientos, y el de un fluido a partir del gradiente de velocidades ?**
3. **¿Qué ecuaciones gobiernan los procesos físicos involucrados?**
   - ▷ Ecuaciones de conservación
   - ▷ Ecuaciones constitutivas
4. **¿Qué herramientas matemáticas se precisan para formularlas?**
   - ▷ Análisis Tensorial en Coordenadas Curvilíneas
   - ▷ Operadores Diferenciales
   - ▷ Teoremas Integrales
5. **¿Cómo se resuelven finalmente las ecuaciones?**
   - ▷ Métodos Variacionales (FEM, BEM, FVM, IGA)