Sean $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$ las ocho cifras de tu DNI[1]. *Por ejemplo si el DNI es* 32478910, *entonces* $c_1 = 3$,$c_2 = 2$, $c_3 = 4$, $c_4 = 7$, $c_5 = 8$, $c_6 = 9$, $c_7 = 1$, $c_8 = 0$.

Para cada i, *con* $1 \leq i \leq 8$ *llamamos* a_i *al resto de* c_i *módulo* 3, *es decir, el resto que se obtiene al dividir* c_i *por* 3. *En el ejemplo anterior* $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 2$, $a_6 = 0$, $a_7 = 1$, $a_8 = 0$.

En los enunciados sustiuiré los correspondientes valores de a_i:

En cada apartado se pedirá calcular una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ *cumpliendo ciertas condiciones y obtener ciertos datos de ella. En todos ellos debe de darse la matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica.*

1. *Una forma cuadŕatica indefinida, degenerada y tal que*

$$u_1 = (1, 1, 2), \qquad u_2 = (0, 1, 2), \qquad u_3 = (0, 0, 1)$$

formen una base de vectores conjugados.

Si la base $B = \{(1, 1, 2), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ es de vectores conjugados sabemos que la matriz asociada a la forma cuadrática respecto de ella es diagonal. Además para ser degenerada $rango(F_B) < 3$ y por tanto en la diagonal al menos tiene que haber un 0. Por último por ser indefinida al menos debe de apaerece un signo positivo y otro negativo en la forma diagonal.

En resumen F_B es una matriz diagonal con un signo positivo, otro negativo y un cero en la misma. Podemos tomar:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para dicha forma cuadrática calcular los vectores autoconjugados, expresándo el resultado en la base canónica y de la manera más sencilla posible.

Sabemos que por ser indefinida y de rango 2 los vectores autoconjugados pueden descomponerse como un unión de dos planos. Si trabajamos en la base B tenemos:

$$w((x', y', z')_B) = (\,x' \quad y' \quad z'\,)_B\, F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = x'^2 - y'^2 = (x' - y')(x' + y')$$

Entonces:

$$\begin{aligned} autoconju(w) &= \{(x', y', z')_B | w((x', y', z')_B) = 0\} = \{(x', y', z')_B | (x' - y')(x' + y') = 0\} = \\ &= \{(x', y', z')_B | x' - y' = 0\} \cup \{(x', y', z')_B | x' + y' = 0\} \end{aligned}$$

Cambiamos de base las dos ecuaciones implícitas que hemos obtenido, de la base B a la base canónica C. Usamos la fórmula de cambio de base:

$$(\,x' \quad y' \quad z'\,)_B = M_{BC}\,(\,x \quad y \quad z\,)_C$$

Reescribimos matricialmente las ecuaciones y hacemos el cambio:

$$x' - y' = 0 \iff (\,1 \quad -1 \quad 0\,) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0 \iff (\,1 \quad -1 \quad 0\,)\, M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \iff 2x - y = 0.$$

$$x' + y' = 0 \iff (\,1 \quad 1 \quad 0\,) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0 \iff (\,1 \quad 1 \quad 0\,)\, M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \iff y = 0.$$

Por tanto:

$$autoconju(w) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$$

2. *Una forma cuadrática indefinida* $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *cumpliendo que* $w(x,y,z) > 0$ *para todo vector* $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ *en el subespacio vectorial* $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

   Recordemos que una interpretación de la signatura (p,q) de la forma cuadrática es que p es la máxima dimensión de un subespacio sobre el cuál la forma cuadrática toma valores positivos sobre vector no nulos y q la máxima dimensión de un subespacio sobre el cuál la forma cuadrática toma valores negativos sobre vector no nulos.

   Tenemos que $dim(U) = dim(\mathbb{R}^3) - \text{n}^{\text{o}}$ ecuaciones $= 3-1 = 2$; por tanto en la signatura $p \geq 2$. Además para ser indefinida $q > 0$. Por tanto necesariamente la signatura es $(2,1)$.

   Entonces tomamos una base de U:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\} = \mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$$

   Y la completamos a una base B' de $\mathbb{R}^3$:

$$B' = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(0,0,1)\}$$

   Para garantizar que sobre U se comporta "de forma positiva" tomamos la forma cuadrática cuya matriz asociada en la base B' es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   La cambiamos a la base canónica:

$$F_C = M_{B'C}^t F_{B'} M_{B'C}$$

   donde

$$M_{B'C} = M_{CB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\,0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. *Una forma cuadrática semidefinida positiva y de núcleo* $ker(w) = \mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,2)\}$.

   Manejamos una idea similar a la de los apartados anteriores. Una forma semidefinida postiva con $dim(ker(w)) = 2$, necesariamente tiene signatura $(2,0)$. Para conseguir que el núcleo sea precisamente el indicado completamos los generadores del núcelo a una base:

$$B'' = \{\underbrace{(1,0,1),(0,1,2)}_{ker(f)},(0,0,1)\}$$

   Para garantizar que el núcleo seal el indicado, tomamos la forma cuadrática cuya matriz asociada en la base B'' es:

$$F_{B''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La cambiamos a la base canónica:

$$F_C = M_{B''C}^t F_{B''} M_{B''C}$$

   donde

$$M_{B''C} = M_{CB''}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Una forma cuadŕatica cumpliendo las condiciones indicadas en el primer apartado pero respecto a la cuál, además, el par* $(1,0,0)$ *y* $(0,1,0)$ *sea también de vectores conjugados.*

   Ahora además de las condiciones impuestas en el primer apartado, necesitamos que:

$$f((1,0,0),(0,1,0)) = 0$$

   siendo f la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática w. Escribimos esos vectores en la base $B = \{(1,1,2),(0,1,2),(0,0,1)\}$:

$$M_{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_B$$

$$M_{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}_B$$

   Entonces queremos que se cumpla:

$$f((1,-1,0)_B,(0,1,-2)_B) = 0 \iff \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}_B F_B \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}_B = 0. \qquad (*)$$

   Para que la forma cuadrática fuese indefinida degenerada, con la base B de vectores conjugados, necesitamos que:

$$F_B = \begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}, \qquad \text{con en } a,b,c \text{ un elemento positivo, otro nulo y otro negativo.}$$

   Imponiendo (*) llegamos a:

$$-b = 0$$

   Por tanto podemos completar las condiciones requeridas tomando $a = 1$ y $b = -1$. Queda.

$$F_B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

   y cambiando a la canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&2\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$