Algebra Lineal II. Curso 2022-2023. Formas cuadráticas. Práctica voluntaria (solucíon).

Para cada $k \in \mathbb{R}$ se considera la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$w(x, y, z) = x^2 - 4z^2 + 4xy + 2xz + 2kyz.$$

1. *Clasificar en función de k la forma cuadrática, indicando además su rango y signatura.*

   Para clasificar calcularemos la matriz asociada F_C respecto de la base canónica. Después la diagonalizaremos por congruencia (que equivale a cambiar de base la matriz asociada) y en función de los signos de la diagonal tendremos la clasificación.

   Para hallar F_C trasladamos los coeficientes de la eucación: en la diagonal, directamente y fuera de ella dividos entre dos.

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k \\ 1 & k & -16 \end{pmatrix}$$

   Diagonalizamos haciendo las mismas operaciones fila que columna.

$$F_C \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & k-2 \\ 0 & k-2 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}((k-2)/4)} \xrightarrow{\mu_{32}((k-2)/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -17 + \frac{(k-2)^2}{4} \end{pmatrix}$$

   La clasificación de la forma cuadrática depende de los signos que aparecen en la diagonal. Para ver como cambian en función de k estudiamos como puntos críticos aquellos valores de k para los cuales se anulan:

$$-17 + \frac{(k-2)^2}{4} = 0 \iff (k-2)^2 = 4 \cdot 17 \iff k = 2 \pm 2\sqrt{17}$$

   Distinguimos entonces los siguientes casos:

k	Signatura	Rango	Clasificación
$k < 2 - 2\sqrt{17}$	$(2, 1)$	3	Indefinida y no degenerada
$k = 2 - 2\sqrt{17}$	$(1, 1)$	2	Indefinida y degenerada
$2 - 2\sqrt{17} < k < 2 + 2\sqrt{17}$	$(1, 2)$	3	Indefinida y no degenerada
$k = 2 + \sqrt{17}$	$(1, 1)$	2	Indefinida y degenerada
$k > 2 + \sqrt{17}$	$(2, 1)$	3	Indefinida y no degenerada

2. *Hallar una base de vectores conjugados.*

   Una base B es de vectores conjugados si y sólo si la matriz asociada en esa base F_B es diagonal. Dado que en el apartado anterior ya hemos diagonalizado, esto equivale a un cambio de base:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB}$$

   La matriz M_{CB} puede calcularse realizando sobre la identidad las mismas operaciones columna hechas en el proceso de diagonalización. Sus columnas serán la base pedida.

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}((k-2)/4)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -k/2 \\ 0 & 1 & (k-2)/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

   Luego la base queda:

$$B = \{(1, 0, 0), (-2, 1, 0), (-k/2, (k-2)/4, 1)\}$$

3. *Para los casos en los que la forma cuadrática es indefinida y de rango 2, dar la ecuación implícita en la base canónica de los dos planos en que se descompone el conjunto de vectores autoconjugados.*

   Hemos visto en el primer apartado que hay dos casos en los que la forma cuadrática es indefinida y de rango 2: $k = 2 \pm 2\sqrt{17}$. En ambos casos la matriz diagonalizada obtenida es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Trabajaremos en principio con esta matriz, es decir, en la base B para calcular y manipular los vectores autoconjugados. Si $(x', y', z')_B$ denotan las coordenadas de un vector en la base B se tiene que:

$$w(x', y', z') = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^2 - 4y'^2.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Autoconj(w) &= \{(x',y',z')_B | w(x',y',z') = 0\} = \{(x',y',z')_B | x'^2 - 4y'^2 = 0\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | (x'-2y')(x'+2y') = 0\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | x'-2y' = 0\} \cup \{(x',y',z')_B | x'+2y' = 0\}. \end{aligned}$$

Vemos que se descomponen en dos planos. Vamos a cambiar sus ecuaciones a la base canónica. Matricialmente pueden escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0$$

donde $M_{BC} = M_{CB}^{-1}$, siendo M_{CB} la matriz de cambio de base calculada en el apartado (ii), para $k = 2 \pm 2\sqrt{17}$. Una forma cómoda de hallar la inversa es hacer sobre la identidad la inversa (y en orden opuesto) de las operaciones columa que hicimos en (ii):

$$Id \overset{\mu_{32}(\mp\sqrt{17}/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp\sqrt{17}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \mp\sqrt{17}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{BC}$$

Entonces el cambio de base queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \mp\sqrt{17}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\pm\sqrt{17} \\ 1 & 4 & 1\mp\sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0$$

De manera que los autoconjugados quedan,

- Para $k = 2 + 2\sqrt{17}$:

$$Autoconj(w) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + (1+\sqrt{17})z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 4y + (1-\sqrt{17})z = 0\}.$$

- Para $k = 2 - 2\sqrt{17}$:

$$Autoconj(w) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + (1-\sqrt{17})z = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + 4y + (1+\sqrt{17})z = 0\}.$$

4. *Para $k = 2$ dar las ecuaciones implícitas de un subespacio $U \subset \mathbb{R}^3$ de la máxima dimensión posible, tal que $w(\vec{u}) < 0$ para todo $\vec{u} \in U$ no nulo.*

   Según vimos en teroía la máxima dimensión de un subespacio sobre el cual la forma cuadrática es negativa para cualquier vector no nulo es justo el número de signos menos que aparecen en la signatura de la forma cuadrática. En este caso vimos en (i) que $sign(w) = (1,2)$ y por tanto tal dimensión es 2.

   Para hallar las ecuaciones del subsepacio una vez más trabajamos con la matriz asociada diagonalizada calculada en el primer apartado:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

   de manera que:

$$w(x',y',z') = x'^2 - 4y'^2 - 17z'^2$$

   Es inmediato que si $x' = 0$ entonces los vectores $(0,y',z')_B$ no nulos cumplen $w(0,y',z') = -4y'^2 - 17z'^2 < 0$ y por tanto $x' = 0$ nos definie un subespacio de dimensión 2 con las características requeridas.

   Cambiamos su ecuación a la base canónica de la manera que lo hemos hecho en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0$$

   donde $M_{BC} = M_{CB}^{-1}$, siendo M_{CB} la matriz de cambio de base calculada en el apartado (ii), para $k = 2$. Queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0$$

   Operando obtenemos la ecuación implícita:

$$x + 2y + z = 0.$$

5. *Para $k = 4$ dar las ecuaciones implícitas de un subespacio $V \subset \mathbb{R}^3$ de la máxima dimensión posible, tal que $w(\vec{v}) > 0$ para todo $\vec{v} \in U$ no nulo.*

   Análogamente a lo visto en el apartado anterior la máxima dimensión de un subespacio sobre el cual la forma cuadrática es positiva para cualquier vector no nulo es justo el número de signos más que aparecen en la signatura de la forma cuadrática. En este caso vimos en (i) que $sign(w) = (1, 2)$ y por tan tanto tal dimensión es 1.

   Para hallar las ecuaciones del subsepacio una vez más trabajamos con la matriz asociada diagonalizada calculada en el primer apartado:
$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$
   de manera que:
$$w(x', y', z') = x'^2 - 4y'^2 - 16z'^2$$
   Es inmediato que si $y' = z' = 0$ entonces los vectores $(x', 0, 0)_B$ no nulos cumplen $w(x', 0, 0) = x'^2 > 0$ y por tanto $y' = z' = 0$ nos definen un subespacio de dimensión 2 con las características requeridas.

   Cambiamos su ecuación a la base canónica de la manera que lo hemos hecho en el apartado anterior:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0 \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0$$
   donde $M_{BC} = M_{CB}^{-1}$, siendo M_{CB} la matriz de cambio de base calculada en el apartado (ii), para $k = 2$. Queda:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0$$
   Operando obtenemos las ecuaciones implícitas:
$$\begin{aligned} x - \tfrac{y}{2} &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

6. *Para $k = 0$ dar vectores no nulos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tales que $w(\vec{u}) > 0$, $w(\vec{v}) = 0$ y $w(\vec{w}) < 0$.*

   Uno podría trabajar directamente con la expresión de w en la base canónica para obtener los vectores pedidos. Pero una vez más es más cómodo trabajar en la forma diagonalizada:
$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$
   de manera que:
$$w(x', y', z') = x'^2 - 4y'^2 - 16z'^2$$
   Entonces, es inmediato que:

   \- Un vector cumpliendo
$$w(\vec{u}) > 0$$
   es $u = (1, 0, 0)_B$. Lo cambiamos a la canónica:
$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   \- Un vector cumpliendo
$$w(\vec{v}) = 0$$
   es $u = (2, 1, 0)_B$. Lo cambiamos a la canónica:
$$M_{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   \- Un vector cumpliendo
$$w(\vec{w}) < 0$$

es $u = (0,1,0)_B$. Lo cambiamos a la canónica:

$$M_{CB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\0 & 1 & -1/2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

7. *La función $w(x,y,z)$ está acotada inferiormente (respectivamente superiormente) si existe alguna constante M tal que $w(x,y,z) > M$ (respectivamente $w(x,y,z) < M$) para todo vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. ¿Existe algún valor de k para el cuál w esté acotada superior o inferiormente?.*

   Vimos en el primer apartado que la forma cuadrática es INDEFINIDA para cualquier valor de k. Eso quiere decir que siempre existe un vector u_+ tal que $w(u_+) > 0$ y un vector u_- tal que $w(u_-) < 0$.

   Veamos que entonces la función $w(x,y,z)$ no puede estar acotada superiormente ni inferiormente. Usaremos la propiedad de las formas cuadráticas:
$$w(\lambda u) = \lambda^2 w(u)$$

   Entonces si hubiese una cota superior $M > 0$ tendría que cumplirse que $w(u) < M$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$. Pero como $w(u_+) > 0$ y
$$w(\lambda u_+) = \lambda^2 w(u_+)$$

   Vemos que es $w(\lambda u_+)$ es tan grande como queramos cuando $\lambda \to \infty$. Por ejemplo si tomamos $\lambda = \sqrt{2M/w(u_+)}$,
$$w(\lambda u_+) = \lambda^2 w(u_+) = 2M > M$$

   contradiciendo la cota supuesta.

   Análogamente si hubiese una cota inferior $M < 0$ tendría que cumplirse que $w(u) > M$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$. Pero como $w(u_-) < 0$ y
$$w(\lambda u_-) = \lambda^2 w(u_-).$$

   Vemos que $w(\lambda u_-)$ que es tan grande (en negativo) como queramos cuando $\lambda \to \infty$. Por ejemplo si tomamos de nuevo $\lambda = \sqrt{2M/w(u_-)}$,
$$w(\lambda u_-) = \lambda^2 w(u_-) = 2M < M$$

   contradiciendo la cota supuesta.