

NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

- 1.— En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y = 0$$

Calcular la ecuación de las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-1, -3)$.

- 2.— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica.
- (ii) Hallar su centro, ejes, vértices y asíntotas.
- (iii) Calcular su ecuación reducida, excentricidad y distancia del vértice al foco.

(Examen final, mayo 2018)

- 3.— Se considera la cónica dada por la ecuación:

$$3y^2 - 4xy + 12x - 14y + 19 = 0$$

- b) Hallar las asíntotas.
- c) Calcular las tangentes exteriores a la cónica pasando por el punto $(0, 3)$.

- 4.— Para las siguientes cónicas

(1) $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0$

(2) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 6 = 0$

(3) $6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0$

(4) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = 0$

(5) $x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0$

(6) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

(7) $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0$

(8) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6y = 0$

(9) $4x^2 + 4y^2 + 8xy + 4x + 4y + 1 = 0,$

determinar: centros, puntos singulares, direcciones asintóticas, asíntotas, ejes, vértices.

5.— Para las cónicas del problema anterior se pide:

- (a) Clasificarlas sin hallar las ecuaciones reducidas.
- (b) Dar las ecuaciones reducidas de las no degeneradas y las rectas que forman las degeneradas.
- (c) En los casos en que existan, determinar focos, directrices y excentricidad.

6.— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0$$

- (i) Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida canónica.
- (ii) Hallar el centro, sus asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.
- (iii) Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-3, -1)$.

(Examen final, mayo 2023)

7.— En el plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$, se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de k .
- (ii) Para $k = 2$ hallar el centro, los ejes y la excentricidad.
- (iii) Demostrar que el eje OY es tangente a la cónica en un mismo punto P que no depende del valor de k . Hallar P .

(Examen final, julio 2023)

8.— En el plano afín y para cada $k \in \mathbb{R}$ se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2xy + ky^2 - 2x + 2ky - 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de k .
- (ii) Para $k = 0$:
 - (ii.a) Hallar las asíntotas y la excentricidad de la cónica.
 - (ii.b) Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(0, 0)$.

(Examen final, mayo 2024)

9.— En el plano afín se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky = 0$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de k (0.5 puntos)
- (ii) Para $k = 2$ y $k = -1$ hallar el centro, los ejes, las asíntotas y la excentricidad. (1 punto)
- (iii) Calcular la ecuación de una elipse que tiene un foco en el punto $F(1, 0)$, un eje es la recta $x - y = 0$ y pasa por el punto $(1, 1)$. (1 punto)

(Examen final, julio 2020)

10.— Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $a \in R$:

$$x^2 + 8xy - ay^2 - 2x - 2ay = 0$$

- a) Clasificar las cónicas en función de a .
- b) Para $a = -1$ hallar la distancia entre sus dos focos.
- c) Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.

(Examen final, julio 2015)

11.— Hallar las ecuaciones de

- (a) una parábola sabiendo que pasa por los puntos $P = (0, 3)$, $Q = (2, 6)$ y tiene por eje la recta $x - y + 1 = 0$. **(Examen final, mayo 2016)**
- (b) la cónica cuyo centro es $C(1, 1)$ y tal que $y = 1$ es un eje y la polar del punto $(2, 2)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.
- (c) la ecuación de una elipse de centro el origen, que tiene por foco el punto $F(1, 1)$ y pasa por el punto $(1, -1)$ **(Examen final, julio 2016)**
- (d) una hipérbola que pasa por el origen, tiene por asíntota la recta $x - 2y - 1 = 0$ y uno de sus ejes es la recta $x - y - 1 = 0$. **(Examen extraordinario, septiembre 2010)**
- (e) una parábola que pasa por los puntos $P = (0, 2)$, $Q = (1, 0)$ y tal que la recta que une P y Q es la recta polar del punto $(0, 0)$. **(Examen final, junio 2008)**
- (f) una cónica que tiene por eje la recta $x - 2y = 0$, es tangente a $x = 3$ y pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(4, 1)$ **(Examen final, julio 2014)**
- (g) una cónica con vértice en el punto $V(1, 1)$, que pasa por el punto $(2, 4)$ y tal que las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x = 2$ son tangentes a ella.. **(Examen final, junio 2012)**
- (h) una elipse sabiendo que tiene uno de sus focos en el punto $(-4, 2)$, el vértice más alejado del mismo es el punto $(2, -1)$ y la excentricidad vale $1/2$. **(Examen final, julio 2011)**
- (i) la parábola C tal que: la recta de ecuación $x + y - 2 = 0$ es la tangente a C en el vértice; C pasa por el origen de coordenadas; y la recta polar del punto $(2, 1)$ con respecto a C es paralela al eje OX .

12.— Hallar la ecuación de una hipérbola sabiendo que su centro es $(1, 1)$, tiene un vértice en $(0, 0)$ y pasa por el punto $(4, 1)$.

(Examen final, mayo 2022)

13.— En un haz de cónicas generado por dos cónicas que no son de tipo parabólico, ¿cuál es el máximo número de parábolas que puede haber?.

(Segundo parcial, junio 2009)

14.— Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1, 0)$, tiene un vértice en el punto $(0, 1)$ y una asíntota paralela al eje OY .

(Examen final, mayo 2024)

15.— Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1, 1)$, es tangente a la recta $x + y - 3 = 0$ en $(1, 2)$ y tiene una asíntota paralela al eje OX .

(Examen final, mayo 2023)

16.— Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1, 2)$, es tangente a la recta $x + y - 2 = 0$ en el punto $(2, 0)$ y pasa por el origen.

(Examen final, mayo 2018)

17.— Hallar la ecuación de una elipse de centro el punto $(1, 2)$, un foco en $(2, 4)$ y sabiendo además que la distancia entre los dos vértices situados sobre el eje menor es 4.

(Examen final, julio 2018)

18.— Hallar la ecuación de una cónica que tiene el centro en el punto $(4, 3)$, un foco en $(0, 0)$ y excentricidad $e = 5/6$.

(Examen final, julio 2024)

I.– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 3xy + y^2 + x + y = 0$$

- (i) Clasificar la cónica.
- (ii) Hallar su centro, ejes y vértices.
- (iii) Calcular su ecuación reducida y excentricidad.

(Examen final, mayo 2016)

II.– Para cada número $k \in \mathbb{R}$ se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2kxy + y^2 - 1 = 0.$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de k .
- (ii) Cuando tenga sentido, calcular al excentricidad de la cónica en función de k .

(Segundo parcial, junio 2010)

III.– Se dice que una hipérbola es *equilátera* cuando sus asíntotas son perpendiculares.

- (a) Demostrar que una cónica no degenerada es una hipérbola equilátera si y sólo si es nula la traza de su matriz T de coeficientes cuadráticos, con respecto a una referencia rectangular.
 - (b) Encontrar todas las hipérbolas equiláteras que tengan la recta $y = 2x$ por eje focal.
-

IV.– Se considera la familia de cónicas dependiente del parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 8xy + ky^2 - 2x + 2ky = 0$$

- a) Clasificar las cónicas en función de k .
- b) Para $k = 1$ hallar la distancia entre sus dos focos.
- c) Para las cónicas de la familia que se descompongan en un par de rectas que se cortan, hallar tales rectas.

(Segundo parcial, junio 2008)

V.– Se consideran las cónicas C_1 y C_2 de ecuaciones:

$$C_1 \equiv x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0$$

$$C_2 \equiv xy + y^2 - 2x + y - 8 = 0.$$

Hallar la ecuación de la cónica no degenerada que pasa por los puntos de intersección de C_1 y C_2 y tiene el centro sobre la recta $x - y - 2 = 0$.

(Examen extraordinario, diciembre 2010)

VI.— En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular, se pide hallar la ecuación de una elipse para la que los dos vértices que pertenecen a un eje son los puntos $(2, 1)$ y $(0, -1)$ y que la distancia entre sus dos focos es 4.

(Examen final, junio 2003)

VII.— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$3x^2 + 4xy - 10x - 4y = 0$$

- (i) Clasificar la cónica.
- (ii) Hallar su centro, ejes, y asíntotas.
- (iii) Calcular su ecuación reducida y excentricidad.

(Examen final, julio 2018)

VIII.— Hallar la ecuación de una hipérbola una de cuyas asíntotas es la recta $x + 2y - 2 = 0$, la otra asíntota es paralela al eje OY y sabiendo que la polar del punto $(1, 0)$ es la recta $x + y - 3 = 0$.

(Segundo parcial, mayo 2005)

IX.— Calcular la ecuación de una cónica de centro el punto $(0, 1)$, tangente a la recta $x + y = 0$ en el punto $(1, -1)$ y que tiene por asíntota la recta $y = 1$.

X.— En el plano afín euclídeo y referido a un sistema de referencia rectangular, determinar las cónicas que pasan por $P(0, 2)$ y $Q(0, 4)$, tienen una asíntota paralela a la recta $y - 4x = 0$ y cortan al eje OX en puntos A y B tales que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2$.

XI.— Hallar la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto $(3, 4)$, un foco en $(0, 0)$ y excentricidad $e = 5/6$.

XII.— Para cada número real a definimos la cónica de ecuación:

$$9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 = 0.$$

- i) Clasificar las cónicas dependiendo de los valores de a .
 - ii) En aquellos casos en los que las cónicas sean degeneradas escribir las ecuaciones de las rectas que las forman.
-

XIII.— En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, calcular la ecuación de una cónica no degenerada cuyo único eje es la recta $y = 2x$ y es tangente a la recta $y = 0$ en el punto $(1, 0)$.

XIV.— Calcular la ecuación de una elipse tangente a los ejes de coordenadas en los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y tangente a la recta $x + y - 2 = 0$.
