ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 3.1-3.2

Geometría afín. (Curso 2023–2024)

1.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera la referencia canónica R y la referencia

$$R' = \{(1,0,1); (1,1,0), (1,1,1), (1,0,0)\}.$$

Denotamos respectivamente por (x, y, z) y (x', y', z') a las coordenadas de un punto respecto a la referencias R y R'. Hallar las ecuaciones del plano $x + y - 2z + 1 = 0$ en la referencia R'.

(Examen final, julio 2014)

2.– En el espacio afín euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 0, 3)$, las rectas

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$, $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$.

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) Recta paralela a r que pasa por A.

(b) Recta que pasa por B y es paralela a P y Q.

(c) Plano paralelo a P que pasa por A.

(d) Plano que pasa por B y es paralelo a r y s.

(e) Recta perpendicular a Q y que pasa por A.

(f) Plano perpendicular a s y que pasa por B.

(g) Recta que pasa por A y es perpendicular a r y a s.

(h) Plano perpendicular a P y Q y que pasa por B.

(i) Plano que contiene a r y es perpendicular a P.

(j) Recta que pasa por A, es perpendicular a s y paralela a Q.

(k) Recta que contiene a B, es paralela a Q y corta a r.

(l) Recta que corta a r y a s y pasa por B.

(m) Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1, 1, 2)$ y que corta a las rectas r y s.

(n) Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.

(o) Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.

(p) Perpendicular común a r y s.

(q) Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.

(r) Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.

3.– En el espacio afín dar la ecuación de una recta pasando por el punto $P = (1, 0, 1)$ y que corta perpendicularmente a la recta:

$$s \equiv \begin{cases} y + z = 4 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Hallar también la distancia entre P y s.

(Examen final, julio 2018)

4.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera un triángulo isósceles ABC con ángulo desigual en el vértices C. Se sabe que está contenido en el plano de ecuación $x + y + z = 1$, $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, -1, 2)$ y tiene un área de $4\sqrt{3}$.

(i) Calcular las coordenadas del vértice C. (1 punto)

(ii) Calcular el volumen de la pirámide triangular que tiene como base el triángulo ABC y vértice el origen. (0.5 puntos)

(iii) Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que transforme el punto A en el punto B y deje C fijo. (1 punto)

(Examen final, junio 2020)

5.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la distancia entre el punto $(-4, 1, 0)$ y la recta r de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

(Examen final, mayo 2018)

6.– En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de 90^o respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(3, 0, 4), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

(Examen final, mayo 2016)

7.– En plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sean A, B, C los vértices de un triángulo equilátero situado en el semiplano $y \geq 0$, con $A = (0, 0)$ y $B = (2, 1)$.

(i) Calcular las coordenadas de C.

(ii) Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que lleve el vértice A en el B.

(Examen final, mayo 2022)

8.– En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $(0,0,1)$ en el punto $(2,2,1)$.

(Examen final, julio 2023)

9.– En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ sea el tetraedro de vértices $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,0,1)$ y $D = (1,0,-1)$. Calcular su área y su volumen.

(Examen final, mayo 2023)

10.– En el espacio afín $\mathbb{R}^2$ se consideran los puntos $A = (0,0)$, $B = (8,6)$.

(i) Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos del plano C que hacen que AB sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC. (0.9 puntos)

(ii) Si $P = (4, 14/3)$ es el baricentro de uno de los triángulos indicados en el apartado anterior hallar su área y perímetro. (0.9 puntos)

(iii) Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleva el punto A en el punto B y el punto B en el punto A. (0.7 puntos)

(Examen julio, mayo 2020)

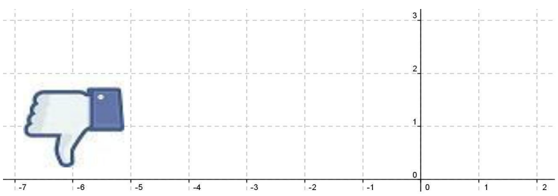
11.– En el espacio afín consideramos una pirámide regular de base cuadrada. Denotamos por A, B, C, D a los cuatro vértices de la base y por E al vértice superior. Sabiendo que la base está contenida en el plano $z = 0$, que $A = (0,0,0)$ y $C = (4,2,0)$ son vértices opuestos de la base y que la altura del pirámide es 5 calcular:

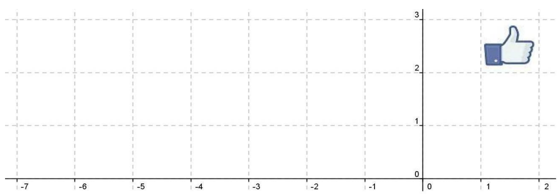
(i) Las coordenadas de los tres vértices restantes.

(ii) El volumen de la pirámide.

(Examen final, mayo 2017)

12.– Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:





(Examen final, julio 2011)

13.– En el plano afín sean los puntos $A(-1,0)$ y $P(1,0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P. ¿Qué tipo de curva es?.

(Examen final, mayo 2015)

14.– En el plano afín se considera la circunferencia $c : (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ y la recta $r : y - 3 = 0$. Para cada recta h pasando por el origen, sea A el punto de intersección (distinto del origen) de c y h y B el punto de intersección de r y h. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos de intersección de la paralela al eje OX por A y la paralela al eje OY por B.

(Examen final, julio 2017)

15.– En el plano afín se sean las rectas $r \equiv y - 1 = 0$ y $s \equiv x - y = 0$. Para cada punto P de s se traza una recta l perpendicular a s pasando por P. Sea Q el punto de corte de r y l.

(i) Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de P y Q.

(ii) Hallar el ángulo que forman las rectas r y s. **(Examen final, mayo 2014)**

16.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (1, 2, 2)$.

(i) Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.

(ii) Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.

(Examen final, junio 2013)

I.– En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene un triángulo ABC de vértices $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:

$$G=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A=(0,0,0),\ B=(1,0,0),\ C=(2,0,1),\ D=(1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

(Examen final, septiembre 2009)

III.– En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sean las rectas $r: x+y=1$ y $s: x=3$ y el punto $P=(2,2)$.

(i) Hallar la ecuación de una recta t que pase por P de manera que éste sea el punto medio de los puntos de corte de t con las rectas r y s.

(ii) Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleve el punto P en el origen y cuadruplique áreas.

(Examen final, julio 2023)

IV.– En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:

- $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(0,1,1)$.

- El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P=(0,10,9)$.

- El vértice D equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

(ii) Hallar las coordenadas del vértice D.

(iii) Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.

(iv) Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.

(Examen final, mayo 2011)

V.– En el plano afín $\mathbb{R}^2$ calcular las ecuaciones de un giro con centro en un punto de la recta $x + y - 2 = 0$ y que lleve el punto $(4, 5)$ en el punto $(1, 6)$.

(Examen final, mayo 2023)

VI.– En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \qquad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 2) + \lambda(0, 1, 2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

(Examen final, julio 2015)

VII.– En el espacio afín euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ forman con el plano Π un ángulo de $60°$.

(Segundo parcial, junio 2003)

VIII.– En el espacio afín sean los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 1, 1)$.

a) Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x + z = 2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?.

b) Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.

(Examen final, julio 2017)

IX.– En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x = y$.

(Examen final, septiembre 2006)

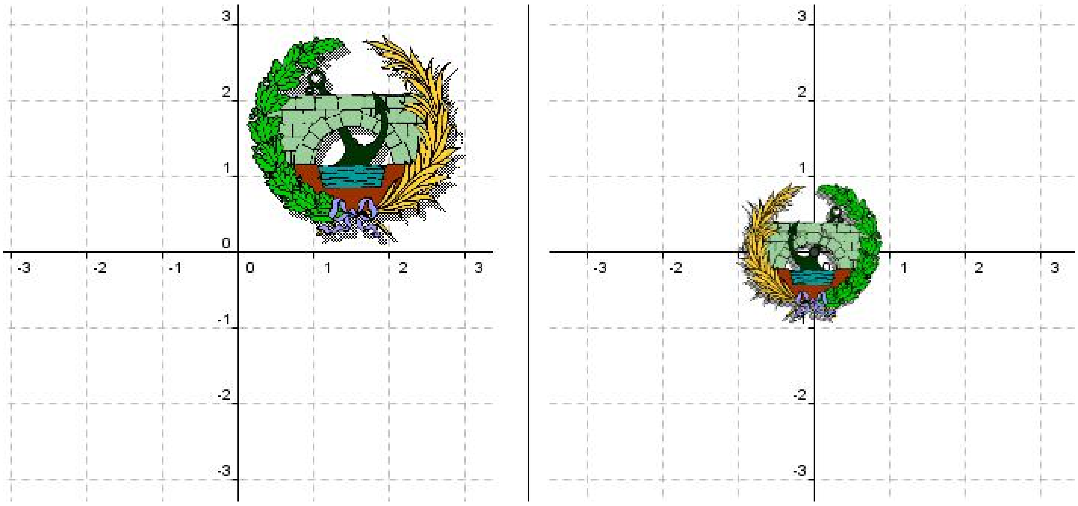
X.– En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0, 1)$. Para cada recta r pasando por el punto P, llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.

(Examen final, junio 2008)

XI.– En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.

(Examen final, mayo 2014)

XII.– Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura en la otra.



(Examen final, junio 2008)

XIII.– Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

(Examen final, julio 2011)

XIV.– En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos $A = (-1, 4)$ y $B = (1, 5)$ respectivamente en $A' = (3, 4)$ y $B' = (5, 3)$. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

(Examen final, mayo 2013)

XV.– En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinar la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

(Examen final, junio 2007)