

- 1.— Se considera el espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^3$  referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:
- (a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio  $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ ;
  - (b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio  $\mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$ ;
  - (c) la rotación de  $60^\circ$  alrededor del semieje que contiene al  $(1, 1, 1)$  (considerando en  $\mathbb{R}^3$  la orientación correspondiente a la base de partida).

- 2.— En el espacio vectorial euclideo  $\mathbb{R}^3$  hallar las ecuaciones de un giro de ángulo  $90^\circ$  y semieje generado por el vector  $(3, 0, 4)$ .

(Examen final, julio 2017)

---

- 3.— En  $\mathbb{R}^3$  se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de  $36.87^\circ$ , de semieje generado por el vector  $(1, 0, 0)$  y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

**Observación:**  $\sin(36.87^\circ) = \frac{3}{5}$ .

(Examen extraordinario, diciembre 2008)

---

- 4.— En el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual se considera el endomorfismo  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$T_C = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- (i) Probar que  $t$  es una transformación ortogonal.
- (ii) Clasificar  $t$  indicando, si procede, el ángulo y eje de giro y/o el plano de simetría.

(Examen final, julio 2021)

---

- 5.— En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar usual se considera el endomorfismo  $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$ . Probar que  $t$  es una transformación ortogonal y describirla geoméricamente indicando si procede el ángulo de giro o el eje de simetría.

(Examen final, julio 2018)

---

6.— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se considera el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica:

- (i) De un endomorfismo se conoce su matriz asociada en la base canónica  $T_C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ . Probar que es una transformación ortogonal y clasificarla describiendo geoméricamente como actúa. (1 punto)
- (ii) Calcular la matriz asociada a una simetría respecto al plano de ecuación  $x + y - z = 0$ . (1 punto)
- (iii) ¿Es posible conseguir la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?. Razona la respuesta (0.5 puntos).

**(Examen final, julio 2020)**

---

7.— Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

- (i) Si  $T$  es la matriz asociada a una transformación ortogonal  $t$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $\text{traza}(T) = 2$  entonces  $t$  es un giro de  $60^\circ$ .
- (ii) Si  $T$  es la matriz asociada a una transformación ortogonal  $t$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $\text{traza}(T) = 0$  entonces  $t$  es un giro de  $120^\circ$ .
- (iii) En  $\mathbb{R}^3$  la composición de una simetría respecto a una recta con una simetría respecto a un plano es un giro.
- (iv) Si  $t$  es una transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^3$  y  $t(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$  entonces se trata de una transformación inversa.

**(Examen final, junio 2021)**

---

8.— Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:

- (i) Si  $T$  es la matriz de una transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^2$  y  $\text{traza}(T) = 1$  entonces  $T$  es un giro. (0.5 puntos)
- (ii) Si  $T$  es la matriz de un giro en  $\mathbb{R}^2$  entonces no tiene autovalores reales. (0.5 puntos)
- (iii) Si consideramos el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  con las condiciones usuales (producto escalar usual y orientación positiva dada por la base canónica),  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  es la matriz de una simetría respecto al plano  $x - y = 0$ . (0.5 puntos)
- (iv) En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  (condiciones usuales) se da una transformación ortogonal  $t$ . Gauss sostiene que es un giro de  $90$  grados y Euler que es un giro de  $-90$  grados. ¿Pueden estar ambos en lo cierto?. (0.5 puntos)

**(Examen final, junio 2020)**

---

9.— Sea  $T$  la matriz asociada a una transformación ortogonal  $t$  en el espacio eculideo  $\mathbb{R}^3$ . Sabiendo que  $\det(T) < 0$ ,  $t(1, 1, 2) = (-1, -1, -2)$  y  $\text{traza}(T) = 1$ , clasificar y describir geoméricamente la transformación  $t$ .

**(Examen final, mayo 2018)**

---

10.— En  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar usual, hallar razonadamente las matrices asociadas respecto a la base canónica de todas las posibles transformaciones ortogonales inversas que lleven la recta  $x + y = 0$  en la recta  $x - y = 0$ .

(Examen final, junio 2021)

---

11.— En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual consideramos los planos  $\pi_1 : x + y - z = 0$  y  $\pi_2 : 2x - y + z = 0$ . Hallar las ecuaciones de un giro que lleve el plano  $\pi_1$  en el plano  $\pi_2$ .

---

12.— En  $\mathbb{R}^2$  respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal  $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

- (i) Hallar  $a$  y  $b$  para que  $t$  sea una simetría respecto a una recta.
- (ii) Para cada uno de los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.

(Examen final, mayo 2017)

---

13.— En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  se considera la aplicación lineal  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (i) Estudiar para que valores de  $a$  y  $b$ ,  $t$  es una transformación ortogonal.
- (ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificarla y describirla geoméricamente.

(Examen final, mayo 2022)

---

14.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) La traza de la matriz asociada a una simetría respecto a una recta en el plano es 0.
- (ii) Si la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano tiene traza 0 entonces es una simetría respecto a una recta.
- (iii) Una simetría en el espacio respecto a una recta es una transformación inversa.
- (iv) En el espacio, la composición de una simetría respecto a un punto y una simetría respecto a un plano siempre es un giro.

(Examen final, junio 2019)

---

**I.**— Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo. Sea  $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  una base de  $V$  que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base  $B$  es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo  $\pi/3$  respecto al semieje generado por el vector  $(1, 0, 0)$

**(Segundo parcial, junio 2006)**

---

**II.**— En  $\mathbb{R}^3$  con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos  $OX, OY, OZ$  en, respectivamente, los semiejes positivos  $OY, OZ, OX$ .

**(Segundo parcial, junio 2009)**

---

**III.**— Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

$$f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0), \quad \det(F_{CC}) = -1, \quad \text{traza}(F_{CC}) = 1.$$

**(Examen final, junio 2008)**

---

**IV.**— Consideramos el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual. Sea  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación ortogonal y  $T$  la matriz asociada a  $t$  respecto una base  $B$  arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

- (i) Si  $B$  es una base ortonormal entonces  $T$  es simétrica.
- (ii) Si  $B$  es una base ortonormal entonces  $T^{-1} = T^t$ .
- (iii) Si  $T$  es una simetría respecto a una recta entonces  $\text{traza}(T) = -1$ .
- (iv) Si  $\text{traza}(T) = -1$  entonces  $T$  es una simetría respecto a una recta.
- (v) Si  $T^{2012}$  es un giro entonces  $T$  es un giro.

**(Examen final, julio 2012)**

---

**V.**— En  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector  $(3, 4)$  en el vector:

- a)  $(2, 6)$ .
- b)  $(4, 3)$

**(Examen final, diciembre 2009)**

---

**VI.**— Sea el espacio euclideo  $\mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada  $a, b \in \mathbb{R}$ , se considera un endomorfismo  $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para las cuales  $t$  es una transformación ortogonal.
- (ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

**(Examen final, junio 2010)**

---

**VII.**— En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea  $B$  una base de  $\mathbb{R}^3$  dada por:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

y  $f$  el endomorfismo de  $\mathbb{R}_3$  cuya matriz asociada con respecto a la base  $B$  es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

- (a) Probar que  $f$  es una transformación ortogonal.
- (b) Clasificar razonadamente  $f$ , indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

**(Examen final, diciembre 2005)**

---

**VIII.**— Se considera un espacio vectorial euclideo  $V$  de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base  $B$ . Determinar e interpretar geoméricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en  $V$  y cuya matriz en la base  $B$  tenga traza nula.

**IX.**— En  $\mathbb{R}^3$  con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial  $U$  en  $V$ .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

**(Examen final, julio 2009)**

---

**X.**— En  $\mathbb{R}^2$  con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica se tiene un endomorfismo de matriz asociada en la base canónica:

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los valores de  $a, b, c$  para los cuales  $T$  es una transformación ortogonal.
- (ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificar la correspondiente transformación ortogonal indicando si procede el ángulo de giro ó el eje de simetría.

**(Examen final, mayo 2015)**

---

**XI.**— En  $\mathbb{R}^3$  se consideran dos vectores independientes  $\bar{v}$  y  $\bar{u}$  que forman entre sí un ángulo  $\alpha$ . Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por  $\bar{v}$  y de la simetría respecto del subespacio generado por  $\bar{u}$  es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

(Segundo parcial, junio 2002)

---

**XII.**— Sea  $T$  la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo  $V$  de dimensión 3. Se sabe que  $\text{traza}(T) = 2$ . Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

(Examen extraordinario, diciembre 2007)

---

**XIII.**— Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:

- (i) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en  $\mathbb{R}^3$ ?
- (ii) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en  $\mathbb{R}^3$ ?
- (iii) Si la matriz asociada a un giro en  $\mathbb{R}^3$  tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?
- (iv) Si  $f$  es una simetría del plano con el producto escalar usual y  $f(1, 2) = (-1, -2)$ . ¿Cuál es el eje de simetría?

(Examen mayo, julio 2015)

---

**XIV.**— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) Si  $T$  es la matriz asociada a un giro en  $\mathbb{R}^3$  entonces  $\text{traza}(T) \geq -1$ .
- (ii) La composición de dos simetrías respecto a una recta en el plano es una nueva simetría respecto a una recta.
- (iii) Si dos bases tienen la misma orientación entonces el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es 1.
- (iv) Si  $T$  es una transformación inversa en  $\mathbb{R}^3$  y 1 es autovalor de  $T$  entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.

(Examen mayo, julio 2019)

---

**XV.**— En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios  $U$  generado por los vectores  $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$  y  $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$  y  $V$  generado por el vector  $\bar{v} = (1, 0, -1)$ . Hallar el subespacio vectorial simétrico del  $V$  respecto de  $U$ .

---