

- 1.— Se considera un espacio euclídeo de dimensión 3, y en él una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ tal que el módulo de \bar{e}_1 y el de \bar{e}_3 es 2 y el de \bar{e}_2 es 1, y además el ángulo formado por \bar{e}_1 y \bar{e}_3 es de 90° y los formados por \bar{e}_1 y \bar{e}_2 y por \bar{e}_2 y \bar{e}_3 son de 60° . Se dan los vectores

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{b} &= \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3\end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Matriz de Gram en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$
 - (b) Módulo de \bar{a} y de \bar{b} .
 - (c) Producto escalar de \bar{a} por \bar{b} .
 - (d) Calcular un vector de módulo 2, que forme un ángulo de 90° con \bar{a} y uno de 60° con \bar{b} .
-

- 2.— Considerando en \mathbb{R}^3 el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Dar un par de vectores de la base canónica que sean ortogonales.
- (ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2, 3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal U^\perp .
- (iii) Hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .
- (iv) Calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

(Examen final, mayo 2021)

- 3.— En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial:

$$V = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

(Examen final, junio 2019)

- 4.— En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se considera la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ y un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dados los vectores $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{u} = (0, 1, 1)$ calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|u\|$, $\|v\|$ y el ángulo que forman.

(Examen final, julio 2019)

- 5.— En \mathbb{R}^3 se considera un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo:

- Los subespacios vectoriales $\mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$ y $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ son ortogonales.
- Los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ forman un ángulo de $\pi/3$.
- Los tres vectores anteriores son unitarios.

- (i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.
- (ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal U^\perp respecto al producto escalar dado.

(Examen final, julio 2025)

- 6.— En \mathbb{R}^3 se considera la forma bilineal simétrica f cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Demostrar que f es un producto escalar.
- (ii) Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Respecto al producto escalar definido por f , :
 - (ii.a) Hallar una base ortogonal de U por el método de Gram-Schmidt.
 - (ii.b) Calcular las ecuaciones paramétricas de U^\perp .
 - (iii.c) Hallar la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 1)$ sobre U

(Examen final, mayo 2023)

- 7.— En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(A, B) = \text{traza}(AB^t)$$

- (i) Demostrar que f es un producto escalar.
- (ii) Calcular la matriz de Gram de f respecto de la base canónica.
- (iii) Si $U = \mathcal{L}(Id)$, hallar una base del subespacio ortogonal U^\perp .

(Examen final, julio 2018)

8.— Dada la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ hallar una matriz P ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

9.— En \mathbb{R}^3 se considera una forma bilineal f cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (i) Demostrar que es un producto escalar.
- (ii) Respecto al producto escalar definido por f :
- (ii.a) Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre $\mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$.
- (ii.b) Hallar una base ortogonal del subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$.

(Examen final, julio 2022)

10.— Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se considera una forma bilineal $f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Demostrar que f es un producto escalar.
- (ii) Respecto al producto escalar definido por f :
- (ii.a) Dar dos polinomios que formen una base ortonormal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.
- (ii.b) Hallar el ángulo que forman los polinomios $p(x) = 1 + x$ y $q(x) = 1 - x$.

(Examen final, mayo 2022)

11.— Sea el espacio vectorial euclideo \mathbb{R}^3 ; se considera una forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (i) ¿Para qué valores de a es f un producto escalar?
- (ii) Calcular a para que los vectores $(1, 0, 1)$ y $(0, 3, -1)$ sean ortogonales respecto al producto escalar definido por f .
- (iii) Para $a = 4$ y con respecto al producto escalar que define f dar una base ortonormal y calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

(Examen final, mayo 2015)

- 12.**— Se considera el espacio vectorial real \mathbb{R}^3 dotado del producto escalar ordinario. Encontrar la matriz F , en la base canónica, de un endomorfismo simétrico f de \mathbb{R}^3 , sabiendo que el núcleo de f es el subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$ y 3 es autovalor doble de f .

(Examen final, setiembre 2002)

- 13.**— Sea espacio euclídeo \mathbb{R}^3 con el producto escalar cuya matriz de Gram en la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado el subespacio vectorial $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 1)\}$:

- (i) Calcular una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .
- (ii) Calcular una base ortonormal de U .
- (iii) Calcular la matriz P_C asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre U respecto de la base canónica.
- (iv) Calcular la proyección ortogonal del vector $(3, 3, 6)$ sobre U .
- (v) ¿Qué representa la matriz $Id - P_C$? Razona la respuesta.

(Examen final, mayo 2025)

- 14.**— Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:

- $B = \{(1, 0), (1, -3)\}$ es una base ortogonal.
- Los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ forma un ángulo de 30 grados.
- $\|(1, 0)\| = \sqrt{3}$.

(Examen final, julio 2024)

ÁLGEBRA LINEAL II

Problemas adicionales.

Espacios Euclídeos. Ortogonalidad

(Curso 2025–2026)

I.— En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se considera una cierta base $B = \{\bar{e}_i\}$. Hallar, en esa base, la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:

- (a) El módulo de \bar{e}_1 es $\sqrt{2}$ y el de \bar{e}_2 es $\sqrt{3}$.
- (b) El subespacio vectorial U , definido por la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en la base B , es ortogonal a la envolvente de \bar{e}_1 .
- (c) La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre la envolvente de \bar{e}_2 es $3\bar{e}_2$.
- (d) El vector \bar{e}_3 es ortogonal a alguno del conjunto $C = \{(2, 2, 0), (2, 0, -1), (0, 2, -1)\}$, cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas en la base B .

(Examen final, junio 1998)

II.— En un espacio vectorial V de dimensión n , se considera una forma bilineal f cuya matriz en una determinada base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es A^2 , siendo A una matriz real $n \times n$, no singular y simétrica. Demostrar que f es un producto escalar. Encontrar, en función de $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, una base ortonormal para f .

III.— Sea un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos U_1 y U_2 . Comprobar que:

- (a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
 - (b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$
-

IV.— En \mathbb{R}^3 y con respecto a una determinada base $\{\bar{e}_i\}$ se definen el producto escalar

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$$

y el endomorfismo f que verifica: $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$, $f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$. ¿Es f un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de f sea diagonal.

V.— En un espacio euclídeo V se tienen dos subespacios suplementarios V_1 y V_2 . Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 sea simétrica es que V_1 y V_2 sean ortogonales.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VI.— Dada la matriz $n \times n$ A definida por

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

VII.— En un espacio euclídeo se consideran los vectores fijos y no nulos \bar{a} y \bar{b} y la aplicación $f(\bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$. Se pide:

- (a) Ver si f es lineal.
- (b) Determinar los autovalores y autovectores.
- (c) ¿Qué condición han de cumplir \bar{a} y \bar{b} para que f sea diagonalizable?

(Examen final, junio 1997)

VIII.— Se considera el espacio vectorial real E de las funciones continuas $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} p : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longrightarrow \int_0^\pi f(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

- (a) Demostrar que esta aplicación dota a E de la estructura de espacio vectorial euclídeo.
- (b) Si llamamos U al subespacio vectorial generado por $\{1, \sin x, \cos x, \sin^2 x\}$, encontrar una base ortogonal de U usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

IX.— Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: “El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre”.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

X.— Consideramos los productos escalares en \mathbb{R}^2 cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son G_1 y G_2 . Sabiendo que $G_1 = \lambda G_2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$, probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.

(Examen final, septiembre 2008)

XI.— En el espacio de matrices $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ consideramos las formas bilineales:

$$\begin{aligned} f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & f(A, B) &= \text{traza}(AB^t) \\ g : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & g(A, B) &= \text{traza}(AB) \end{aligned}$$

- (a) Estudiar si son simétricas.
- (b) Probar que para $n \geq 2$, f define un producto escalar, pero g no. ¿Qué ocurre para $n = 1$?
- (c) Para $n = 2$ calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada.
- (d) Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f , calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio de matrices simétricas.
- (e) Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f , hallar una base ortonormal del subespacio generado por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (f) Para cualquier $n > 2$, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada a g .

(Segundo parcial, junio 2009)
