

- 1.— Se considera un espacio euclídeo de dimensión 3, y en él una base  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  tal que el módulo de  $\bar{e}_1$  y el de  $\bar{e}_3$  es 2 y el de  $\bar{e}_2$  es 1, y además el ángulo formado por  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_3$  es de  $90^\circ$  y los formados por  $\bar{e}_1$  y  $\bar{e}_2$  y por  $\bar{e}_2$  y  $\bar{e}_3$  son de  $60^\circ$ . Se dan los vectores

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{b} &= \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3\end{aligned}$$

Se pide:

- (a) Matriz de Gram en la base  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$
- (b) Módulo de  $\bar{a}$  y de  $\bar{b}$ .
- (c) Producto escalar de  $\bar{a}$  por  $\bar{b}$ .
- (d) Calcular un vector de módulo 2, que forme un ángulo de  $90^\circ$  con  $\bar{a}$  y uno de  $60^\circ$  con  $\bar{b}$ .

- 
- 2.— Considerando en  $\mathbb{R}^3$  el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Dar un par de vectores de la base canónica que sean ortogonales.
- (ii) Dado  $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2, 3)\}$  calcular una base de su subespacio ortogonal  $U^\perp$ .
- (iii) Hallar una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .
- (iv) Calcular el ángulo que forman los vectores  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .

**(Examen final, mayo 2021)**

---

- 3.— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial:

$$V = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

**(Examen final, junio 2019)**

---

- 4.— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se considera la base  $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  y un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base  $B$  es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dados los vectores  $\vec{v} = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{u} = (0, 1, 1)$  calcular  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\|u\|$ ,  $\|v\|$  y el ángulo que forman.

**(Examen final, julio 2019)**

---

- 5.— En  $\mathbb{R}^3$  se considera un producto escalar  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cumpliendo:

- Los subespacios vectoriales  $\mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$  y  $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  son ortogonales.
- Los vectores  $(1, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  forman un ángulo de  $\pi/3$ .
- Los tres vectores anteriores son unitarios.

(i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.

(ii) Dado  $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 2, 3)\}$  calcular una base de su subespacio ortogonal  $U^\perp$  respecto al producto escalar dado.

**(Examen final, mayo 2018)**

---

- 6.— Sea  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que la forma bilineal  $f$  define un producto escalar.

(ii) Obtener una base ortonormal de  $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (3, 2, 1)\}$  respecto del producto escalar  $f$ .

**(Examen final, julio 2021)**

---

- 7.— En el espacio vectorial  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  se considera la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(A, B) = \text{traza}(AB^t)$$

(i) Demostrar que  $f$  es un producto escalar.

(ii) Calcular la matriz de Gram de  $f$  respecto de la base canónica.

(iii) Si  $U = \mathcal{L}(Id)$ , hallar una base del subespacio ortogonal  $U^\perp$ .

**(Examen final, julio 2018)**

---

- 8.— Dada la matriz simétrica  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  hallar una matriz  $P$  ortogonal ( $P^{-1} = P^t$ ) tal que  $P^{-1}AP$  sea una matriz diagonal.
-

9.— En  $\mathbb{R}^3$  se considera una forma bilineal  $f$  cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (i) Demostrar que es un producto escalar.
- (ii) Respecto al producto escalar definido por  $f$ :
- (ii.a) Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$ .
- (ii.b) Hallar una base ortogonal del subespacio  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

**(Examen final, julio 2022)**

---

10.— Sea  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se considera una forma bilineal  $f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (i) Demostrar que  $f$  es un producto escalar.
- (ii) Respecto al producto escalar definido por  $f$ :
- (ii.a) Dar dos polinomios que formen una base ortonormal de  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ .
- (ii.b) Hallar el ángulo que forman los polinomios  $p(x) = 1 + x$  y  $q(x) = 1 - x$ .

**(Examen final, mayo 2022)**

---

11.— Se considera el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^3$  dotado del producto escalar ordinario. Encontrar la matriz  $F$ , en la base canónica, de un endomorfismo simétrico  $f$  de  $\mathbb{R}^3$ , sabiendo que el núcleo de  $f$  es el subespacio  $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$  y 3 es autovalor doble de  $f$ .

**(Examen final, setiembre 2002)**

---

12.— Sea el espacio vectorial euclideo  $\mathbb{R}^3$ ; se considera una forma bilineal  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (i) ¿Para qué valores de  $a$  es  $f$  un producto escalar?.
- (ii) Calcular  $a$  para que los vectores  $(1, 0, 1)$  y  $(0, 3, -1)$  sean ortogonales respecto al producto escalar definido por  $f$ .
- (iii) Para  $a = 4$  y con respecto al producto escalar que define  $f$  dar una base ortonormal y calcular el ángulo que forman los vectores  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ .

**(Examen final, mayo 2015)**

---

**13.**— En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto de la base canónica, la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, \quad y + 2z = 0\}.$$

¿Cuál es la proyección ortogonal de  $(1, 1, 1)$  sobre el subespacio  $U$ ?

**(Examen final, julio 2015)**

---

**14.**— Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:

- Los vectores  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  forma un ángulo de 60 grados.

-  $\|(1, 1)\| = \sqrt{3}$ .

-  $B = \{(1, 0), (1, -2)\}$  es una base ortogonal.

**(Examen final, julio 2017)**

---

**I.**— En un espacio vectorial real  $V$  de dimensión 3 se considera una cierta base  $B = \{\bar{e}_i\}$ . Hallar, en esa base, la matriz métrica  $G$  de un producto escalar definido en  $V$  del que se sabe que:

- (a) El módulo de  $\bar{e}_1$  es  $\sqrt{2}$  y el de  $\bar{e}_2$  es  $\sqrt{3}$ .
- (b) El subespacio vectorial  $U$ , definido por la ecuación  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  en la base  $B$ , es ortogonal a la envolvente de  $\bar{e}_1$ .
- (c) La proyección ortogonal de  $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$  sobre la envolvente de  $\bar{e}_2$  es  $3\bar{e}_2$ .
- (d) El vector  $\bar{e}_3$  es ortogonal a alguno del conjunto  $C = \{(2, 2, 0), (2, 0, -1), (0, 2, -1)\}$ , cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas en la base  $B$ .

**(Examen final, junio 1998)**

---

**II.**— En un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ , se considera una forma bilineal  $f$  cuya matriz en una determinada base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  es  $A^2$ , siendo  $A$  una matriz real  $n \times n$ , no singular y simétrica. Demostrar que  $f$  es un producto escalar. Encontrar, en función de  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ , una base ortonormal para  $f$ .

---

**III.**— Sea un espacio vectorial euclídeo  $V$  de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos  $U_1$  y  $U_2$ . Comprobar que:

- (a)  $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
  - (b)  $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$
- 

**IV.**— En  $\mathbb{R}^3$  y con respecto a una determinada base  $\{\bar{e}_i\}$  se definen el producto escalar

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$$

y el endomorfismo  $f$  que verifica:  $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$ ,  $f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$ ,  $f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$ . ¿Es  $f$  un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de  $f$  sea diagonal.

---

**V.**— En un espacio euclídeo  $V$  se tienen dos subespacios suplementarios  $V_1$  y  $V_2$ . Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre  $V_1$  paralelamente a  $V_2$  sea simétrica es que  $V_1$  y  $V_2$  sean ortogonales.

**(Examen extraordinario, septiembre 2004)**

---

**VI.**— Dada la matriz  $n \times n$   $A$  definida por

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

**(Examen extraordinario, septiembre 1999)**

---

**VII.**— En un espacio euclídeo se consideran los vectores fijos y no nulos  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  y la aplicación  $f(\bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$ . Se pide:

- (a) Ver si  $f$  es lineal.
- (b) Determinar los autovalores y autovectores.
- (c) ¿Qué condición han de cumplir  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$  para que  $f$  sea diagonalizable?

**(Examen final, junio 1997)**

---

**VIII.**— Se considera el espacio vectorial real  $E$  de las funciones continuas  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  y la aplicación

$$\begin{aligned} p : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\longrightarrow \int_0^\pi f(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

- (a) Demostrar que esta aplicación dota a  $E$  de la estructura de espacio vectorial euclídeo.
- (b) Si llamamos  $U$  al subespacio vectorial generado por  $\{1, \operatorname{sen}x, \operatorname{cos}x, \operatorname{sen}^2x\}$ , encontrar una base ortogonal de  $U$  usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

**IX.**— Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: “El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre”.

**(Examen extraordinario, diciembre 2006)**

---

**X.**— Consideramos los productos escalares en  $\mathbb{R}^2$  cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son  $G_1$  y  $G_2$ . Sabiendo que  $G_1 = \lambda G_2$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 1$ , probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.

**(Examen final, septiembre 2008)**

---

**XI.**— En el espacio de matrices  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  consideramos las formas bilineales:

$$\begin{aligned} f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & f(A, B) &= \operatorname{traza}(AB^t) \\ g : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \times M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & g(A, B) &= \operatorname{traza}(AB) \end{aligned}$$

- (a) Estudiar si son simétricas.
- (b) Probar que para  $n \geq 2$ ,  $f$  define un producto escalar, pero  $g$  no. ¿Qué ocurre para  $n = 1$ ?
- (c) Para  $n = 2$  calcular la matriz asociada a  $g$  respecto de la base canónica, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada.
- (d) Para  $n = 2$  y con el producto escalar definido por  $f$ , calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio de matrices simétricas.
- (e) Para  $n = 2$  y con el producto escalar definido por  $f$ , hallar una base ortonormal del subespacio generado por las matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (f) Para cualquier  $n > 2$ , hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada a  $g$ .

**(Segundo parcial, junio 2009)**

---