ÁLGEBRA LINEAL II — Práctica 1.1

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas — (Curso 2025–2026)

1.– Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no bilineales y en las que resulten serlo, dar la matriz que las representa en las bases canónicas correspondientes. Decidir también si las formas bilineales son simétricas o antisimétricas.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_2 - 3x_1y_1$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$

(c) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 1 - x_2y_1 + 5x_3y_1$

(d) $l : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l(A, B) = \mathrm{tr}AB$

(e) $m : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m(p, q) = p(1)q(-1) - p(-1)q(1)$

2.– Dada la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$:

(i) Clasificarla indicando su rango y signatura.

(ii) Hallar una base de vectores conjugados.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados, expresándolos de la manera más sencilla posible (dar el resultado respecto de la base canónica).

(iv) Calcular la matriz asociada a w en la base $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$.

(v) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((2, 1), (1, 3))$.

3.– Dada la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$w(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$.

(i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica. Clasificar la forma cuadrática indicando su rango y signatura.

(ii) Calcular una base de vectores conjugados.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados descomponiéndolos, si es posible, como unión de dos planos.

(iv) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

(Examen final, julio 2018)

4.– Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor igual que 1 con coeficientes reales. Se define la forma bilineal:

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p(2)q(2)$$

(i) Probar que f es simétrica y hallar la matriz asociada a f en la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática asociada a f indicando además su rango y signatura.

(iii) Dar dos polinomios que formen una base de vectores conjugados.

(iv) Dar un polinomio autoconjugado.

(v) ¿Existe una base en la cuál la matriz asociada a f es la identidad?. Razona la respuesta.

(Examen final, mayo 2025)

5.– Dado $a \in \mathbb{R}$, se define la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $w(x, y) = x^2 + 2axy + y^2$.

(i) Clasificar w en función de a indicando además su rango y signatura.

(ii) Para $a = 2$ dar una base de vectores conjugados.

(iii) Para $a = 0$ y $a = 1$ hallar los vectores autoconjugados.

(iv) ¿Para qué valores de a existe una base B en la cual la matriz asociada a f es $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?.

(v) Si f es la forma bilineal asociada a w hallar $f((1, 2), (2, 3))$ para $a = -1$.

(Examen final, mayo 2023)

6.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática w cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar la forma cuadrática en función de k, indicando su rango y signatura.

(ii) Para $k = 1$ calcular una base de vectores conjugados.

(iii) Para $k = 0$ calcular los vectores autoconjugados.

(iv) ¿Para qué valores de k la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?.

(Examen final, julio 2024)

7.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida como:

$$w(x, y, z) = x^2 - ay^2 + 2axz + 2yz$$

(a) Clasificar w en función de a indicando además el rango y la signatura. ¿Para qué valores de a es w un producto escalar?.

(b) Para aquellos valores de a para los cuales w es degenerada, dar un vector autoconjugado que no esté en el núcleo.

(c) Para $a = 0$ dar una base de vectores conjugados.

(Examen final, julio 2025)

8.– De una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se sabe:

- Los vectores $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ son una base de vectores conjugados.

- El vector $(0, 1, 1)$ está en el núcleo de la forma cuadrática.

- $w(1, 1, 0) = 2$.

(i) Hallar la matriz asociada a w en la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática en función de su rango y signatura.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados. Si es posible, expresarlos como unión de dos planos, dando en la base canónica un generador de cada una de ellas.

(iv) Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w, calcular $f((1, 1, 0), (1, 2, -1))$.

(Examen final, julio 2021)

9.– Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se define la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p'(1)q'(1)$$

(i) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica.

(ii) Clasificar f indicando además su rango y signatura.

(iii) Dar un par de polinomios que formen una base de vectores conjugados respecto de f.

(iv) Calcular el conjunto de vectores autoconjugados. Si puede escribirse como unión de dos subespacios de dimensión 1 dar un generador de cada uno de ellos.

(v) Hallar $w(1 + 2x)$ siendo w la forma cuadrática asociada a f.

(Examen final, julio 2023)

10.– De una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se sabe que:

a) $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de vectores conjugados.

b) Es degenerada.

c) $w(1, 0, 1) = -w(0, 0, 1) = 4$.

(i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

(ii) Indicar el rango y la signatura de w.

(iii) Hallar los vectores autoconjugados. Dar el resultado en la base canónica. Si es posible, descomponer el conjunto de vectores autoconjugados como unión de dos planos.

(iv) Si f es la forma bilineal asociada a w hallar $f((1, 0, 2), (0, 2, 3))$.

(Examen final, mayo 2024)

11.– De una forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que:

- $ker(f) = \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$.

- Los vectores $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ son conjugados respecto de f.

- Si w es la forma cuadrtrica asociada a f, $w(1, 0, 0) = w(1, 1, 1) = 2$.

Se pide:

(i) Hallar la matriz asociada a F respecto de la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática w indicando además su rango y signatura.

(iii) Dar una base de vectores conjugados respecto de w.

(iv) Calcular los vectores autoconjugados.

(Examen final, junio 2019)

12.– Sea $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $u, v \in \mathbb{R}^n$ verificando $w(u) = 1, w(v) = -1$. Probar que $\{u, v\}$ son linealmente independientes. ¿Es necesariamente w una forma cuadrática indefinida?.

(Examen final, junio 2009)

13.– En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^3$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).

(i) w es definida positiva.

(ii) w es semidefinida negativa.

(iii) w es indefinida y no degenerada.

(iv) w es indefinida y degenerada.

(Examen final, julio 2022)

14.– Sea $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática **no degenerada** en $\mathbb{R}^3$ y F_C su matriz asociada en la base canónica. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

(i) Si todos los elementos de la diagonal de F_C son positivos entonces w es definida positiva.

(ii) Si algún elemento de la diagonal de F_C es nulo entonces w es indefinida.

(iii) F_C^2 es la matriz asociada a una forma cuadrática definida positiva.

(iv) Si $F_C = Id$ entonces $f((x_1, x_2, x_3)_B, (y_1, y_2, y_3)_B) = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w, en una base B.

(v) $f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + yx' + yy' + zz'$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w.

(Examen final, julio 2020)

15.– Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si w es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ de rango 1 entonces no puede ser indefinida.

(ii) Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = 0$ entonces w es semidefinida positiva.

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = -1$ entonces w es indefinida.

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ pueden ser matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.

(v) Si $A \in \mathcal{M}_{2015\times 2015}(\mathbb{R})$ es la matriz asociada a una forma cuadrática semidefinida negativa, entonces $det(A) < 0$.

(Examen parcial, mayo 2015)

ÁLGEBRA LINEAL II — Problemas adicionales

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas — (Curso 2025–2026)

I.– Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K$, $\quad \phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.

(a) Demostrar que ϕ es bilineal.

(b) Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.

(c) ¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?

II.– En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:

- el vector $(1, 1, 0)$ es autoconjugado,
- el vector $(2, 0, 1)$ pertenece al núcleo,
- la forma cuadrática aplicada en $(0, 1, 0)$ da 2 y
- la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$ da -1.

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y w su forma cuadrática asociada. Se sabe que:

- $ker(w) = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$.
- $w(0, 1) = 2$

(i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

(iii) Hallar una base de vectores conjugados.

(iv) Hallar los vectores autoconjugados.

(v) Calcular $w(1, 2)$.

(Examen final, mayo 2022)

IV.– Fijados $a, b \in \mathbb{R}$ se definie la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z, t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.

(ii) Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.

(iii) Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.

(Examen final, julio 2012)

V.– En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x,y) = x^2+2xy-y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u,v) = 2uv+v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.

VI.– Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad w(x,y,z) = x^2 + 2kxy - z^2 + 2yz$$

(i) Clasificar w en función de los valores de k, indicando su rango y signatura.

(ii) Para $k = 1$ hallar los vectores autoconjugados. Expresar el resultado de la manera más sencilla posible y con respecto a la base canónica.

(iii) Dar un vector que sea autoconjugado para cualquier valor de k.

(iv) Calcular k para que los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ sean conjugados.

(v) ¿Existe algún valor de k para los cuales no existan vectores autoconjugados no nulos?.

(Examen final, junio 2020)

VII.– Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, definimos la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)$$

i) Probar que f es una forma bilineal simétrica.

ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

iii) Escribir tres polinomios formando una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

iv) Indicar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f.

(Examen final, diciembre 2009)

VIII.– Sea $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrárica. Se sabe que:

- Los vectores $\{(1,1,0), (0,1,0), (1,1,1)\}$ son una base de vectores conjugados.
- w tiene rango 1.
- $(0,1,0)$ es un vector autoconjugado.
- $w(1,2,0) = 1$.

i) Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.

ii) Clasificar w.

iii) Hallar todos los vectores autoconjugados de w.

(Examen final, julio 2013)

IX.– Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E. Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es

$$\omega(\bar{x}) = 2(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_4)^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - 4x_3x_4.$$

(a) Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.

(b) Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.

X.– Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el rango y la signatura de ω.

(b) Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.

(c) Considérese el subespacio vectorial

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + 2z = z + t = 0\}$$

y la restricción Ω de ω a V. Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

(Examen final, junio 2001)

XI.– En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in R$, se considera la aplicación dada por:

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow R, \quad f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

i) Probar que es una forma bilineal simétrica.

ii) Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

iii) Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a

iv) Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a.

(segundo parcial, mayo 2010)

XII.– Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:

(i) $w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.

(ii) $-w_1 - w_2$ no es indefinida.

(iii) $w_1 + w_2$ es definida positiva.

(Examen final, mayo 2011)

XIII.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:

$$\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \omega(x, y, z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b.

(Examen final, septiembre 2005)

XIV.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de formas cuadráticas $\omega_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que en la base canónica tienen la siguiente expresión:

$$\omega_a(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a.

(Examen final, junio 2005)

XV.– Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Supongamos que

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Se verifica que $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$.

(ii) Si $a = -2$, entonces f es antisimétrica.

(iii) Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$.

(Examen final, mayo 2012)