2.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2,-1,1)$, $B(-1,0,3)$, las rectas*

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$, $\quad Q : x + 5y - 6z - 4 = 0.$

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) *Recta paralela a r que pasa por A.*

El vector director es el de r, es decir, $(3,1,1)$ y pasa por $A(2,-1,1)$. Por tanto su ecuación continua es:

$$\frac{x-2}{3} = y+1 = z-1$$

(d) *Plano que pasa por B y es paralelo a r y s.*

La dirección del plano está generada por los vectores directores de r y s, es decir, $(3,1,1)$ y $(1,2,-3)$. Por tanto el vector normal (perpendicular) del plano será el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

El plano será de la forma

$$-5x + 10y + 5z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por $B(-1,0,3)$ queda $\lambda = -20$, y el plano es

$$-x + 2y + z - 4 = 0$$

Otra forma de calcularlo directamente es tomar los puntos (x,y,z) de manera que el vector que los une con B sea linealmente dependiente de los vectores directores:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(f) *Plano perpendicular a s y que pasa por B.*

El vector normal al plano que buscamos será el vector director de s, es decir, $(1,2,-3)$. La ecuación del plano es de la forma:

$$x + 2y - 3z + \lambda = 0$$

e imponiendo que $B(-1,0,3)$ esté en el plano, queda $\lambda = 10$:

$$x + 2y - 3z + 10 = 0$$

(h) *Plano perpendicular a P y Q y que pasa por B.*

Si el plano es perpendicular a P y Q su dirección está generada por los vectores normales a ambos. El plano buscado viene dado entonces por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \iff -8x + 22y + 17z - 59 = 0$$

(l) *Recta que corta a r y a s y pasa por B.*

Calcularemos los planos π_1 y π_2 que pasan por r y B y s yB; la recta pedida es la intersección de ambos.

En concreto la dirección del plano π_1 viene dada por los vectores $(3,1,1)$ y $(-1,2,0) - B = (0,2,-3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$$

Análogamente, la dirección del plano π_2 viene dada por los vectores $(1,2,-3)$ y $(0,0,0) - B = (1,0,-3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$$

Ahora la dirección de la recta intersección de π_1 y π_2 es el producto vectorial de sus direcciones normales:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -5 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9\bar{e}_1 - 23\bar{e}_2 + 27\bar{e}_3$$

Por tanto la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y}{-23} = \frac{z-3}{+27}$$

(m) *Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1,1,2)$ y que corta a las rectas r y s.*

Un punto de r es de la forma $(-1+3a, 2+a, a)$ y uno de s de la forma $(b, 2b, -3b)$. Debemos de fijar dos puntos de manera que el vector que los une sea paralelo a $\bar{v}(1,1,2)$:

$$\frac{-1+3a-b}{1} = \frac{2+a-2b}{1} = \frac{a+3b}{2}$$

de donde $a = 17/15$ y $b = 11/15$. Por tanto la recta que buscamos pasa por el punto $(11/15, 22/15, -33/15)$ y su ecuación es:

$$\frac{x-11/15}{1} = \frac{y-22/15}{1} = \frac{z-33/15}{2}$$

Otra forma de hallar esta recta es considerar el plano π definido por la direción $\bar{v}$ y la recta r. Luego intersecamos dicho planos con s y tendremos un puntos de la recta que buscamos.

Así la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 5y - 2z - 11 = 0$$

Calculamos la intersección con s; tomamos un punto de dicha recta $(b, 2b, -3b)$. Intersecamos con el plano:

$$-b + 10b + 6b - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 11/15$$

vemos que obtenemos de nuevo el punto calculado anteriormente. Ahora conocido un punto y la dirección la ecuación de la recta que buscamos es inmediata.

(n) *Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.*

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r, están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r. Dicho plano tiene por vector normal el director de r, $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s, calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x - 2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P, $(3, -2, 4)$ y el director de r, $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(p) *Perpendicular común a r y s.*

La recta que buscamos esta contenida en los planos π_1 y π_2 definidos por r y s y la dirección perpendicular a ambos respectivamente. Por tanto es la intersección de estos dos planos. Lo que haremos es caclular el plano π_1 e intersecarlo con s para conocer un punto de la recta que buscamos. Calcularemos también la direción ortogonal a ambas rectas.

La dirección perpendicular a r y s, la obtenemos haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

Podemos tomar para simplificar la dirección $(-1, 2, 1)$. Ahora la ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x - 4y + 7z + 7 = 0$$

Intersecamos con s. Un punto de esta recta es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación de π:

$$-a - 8a - 21a + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7/30$$

Por tanto el puntos de intersección de la recta buscada con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x - 7/30}{-1} = \frac{y - 7/15}{2} = \frac{z + 7/10}{1}$$

(q) *Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.*

La distancia de A a B se obtiene directamente:

$$d(A,B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia de A a r se obtiene mediante la fórmula:

$$d(A,r) = \frac{\|\overline{AC} \wedge \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}$$

donde C es un punto de r y v su vector director. En este caso, $C(-1,2,0)$, $\bar{v}(3,1,1)$.

$$d(A,r) = \frac{\|(-3,3,-1) \wedge (3,1,1)\|}{\|(3,1,1)|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{143}}{11}$$

Observación: Si no recordamos la fórmula, se puede calcular el plano perpendicular a r pasando por A. La intersección de dicho plano con r nos da un punto M que es la proyección de A sobre r. La distancia pedida es la distancia entre A y M.

La distancia de B a P viene dada por la expresión:

$$d(B,P) = \frac{3\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 3 + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}} = \frac{17\sqrt{29}}{29}$$

Observación: De nuevo si queremos reducir el cálculo a la distancia entre dos puntos, hallamos el punto de corte de la recta perpendicular al plano y que pasa por B con el plano P.

Por último para calcular la distancia entre r y s, hallamos el punto de corte de la perpendicular a ambas con alguna de las rectas. Vimos en el apartado (p) que el punto de corte con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. Ahora la distancia pedida es la de este punto a la recta r:

$$d(r,s) = \frac{\|(7/30+1, 7/15-2, -7/10) \wedge (3,1,1)\|}{\|(3,1,1)|} = \frac{5\sqrt{66}/6}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Otra forma es usar directamente la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|[(-1,2,0)-(0,0,0),(3,1,1),(1,2,-3)]|}{\|(3,1,1) \wedge (1,2,-3)\|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(r) *Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.*

El ángulo formado por r y s es el ángulo formado por sus direcciones:

$$cos(\alpha(r,s)) = \frac{|((3,1,1)(1,2,-3))|}{\|(3,1,1)\|\|(1,2,-3)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,s) = 80,72^o$$

El ángulo formado por s y Q es el complementario del que forman la direción normal a Q y la dirección de s. Por tanto:

$$sin(\alpha(s,Q)) = \frac{|((1,2,-3)(1,5,-6))|}{\|(1,2,-3)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(s,Q) = 79,84^o$$

El ángulo formado por P y Q es el que forman sus direciones normales:

$$cos(\alpha(P,Q)) = \frac{|((3,-2,4)(1,5,-6))|}{\|(3,-2,4)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{31}{\sqrt{29}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(P,Q) = 43,02^o$$

5.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la distancia entre el punto $(-4,1,0)$ *y la recta* r *de ecuaciones:*

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=3 \end{cases}$$

Aunque sabemos que hay una fórmula directa para hallar la distancia de un punto a un plano en el espacio, no es aconsejable usarla porque utiliza el prodcuto vectorial y el método de cáclulo habitual de mismo no es válido bajo productos escalares distintos del usual.

Entonces para calcular la distancia hallaremos directamente un punto Q en la recta r de forma que el vector que lo une con $P=(-4,1,0)$ sea ortogonal a la recta. En ese caso sabemos que $d(P,r)=d(P,Q)$.

Comenzamos hallando las ecuaciones paramétricas de la recta resolviendo en función de un parámetro el sistema formado por sus dos ecuacioens implícitas. Sumándolas obtenemos $x=2$ y después de la primera $y=z-1$. Nos queda:

$$x=2, \quad y=\lambda-1, \quad z=\lambda.$$

Vemos también que el vector director de la recta es $(0,1,1)$.

Ahora un punto Q de la recta será:

$$Q=(2,\lambda-1,\lambda)$$

Imponemos que PQ sea ortogonal a $(0,1,1)$:

$$PQ=Q-P=(6,\lambda-2,\lambda)$$

y

$$0=PQ\cdot(0,1,1)=(6,\lambda-2,\lambda)G_C(0,1,1)^t=6\lambda$$

Deducimos que $\lambda=0$ y:

$$d(P,r)=d(P,Q)=\|PQ\|=\|(6,-2,-0)\|=\sqrt{(6,-2,0)G_C(6,-2,0)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

6.– *En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de* 90^o *respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:*

$$(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(3,0,4), \qquad \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda>0.$$

(1.2 puntos)

Las ecuaciones de giro son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

donde T_C es la matriz de giro de semieje generado por $(3,0,4)$ y ángulo 90^o.

Para hallar la matriz T_C construimos una base ortonormal B bien orientada donde el primer vector será el generador del semieje normalizado:

- Buscamos un vector $\vec{u}_2$ perpendicular a $(3,0,4)$:

$$(x,y,z)\cdot(3,0,4)=0 \iff 3x+4z=0$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2=(0,1,0)$.

- Buscamos un segundo vector $\vec{u}_3$ perpendicular a $(3,0,4)$ y $(0,1,0)$:

$$\begin{aligned}(x,y,z)\cdot(3,0,4)=0 &\iff 3x+4z=0\\ (x,y,z)\cdot(0,1,0)=0 &\iff y=0\end{aligned}$$

Tomamos $\vec{u}_3=(-4,0,3)$.

Comprobamos si la base $\{(3,0,4),(0,1,0),(-4,0,3)\}$ tiene orientación positiva:

$$det\begin{pmatrix}3&0&-4\\0&1&0\\4&0&3\end{pmatrix}=25>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Orientación positiva.}$$

Normalizamos los vectores:

$$\frac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|}=(3/5,0,4/5),\quad \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|}=(0,1,/0),\quad \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|}=(-4/5,0,3/5)$$

Tenemos una base $B=\{(3/5,0,4/5),(0,1,0),(-4/5,0,3/5)\}$ ortonormal bien orientada. En esa base la matriz de giro de $\alpha=90^o$ es:

$$T_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos\,\alpha&-sin\,\alpha\\0&sin\,\alpha&cos\,\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

En la base canónica será:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{BC}=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB}=\begin{pmatrix}3/5&0&-4/5\\0&1&0\\4/5&0&3/5\end{pmatrix}$$

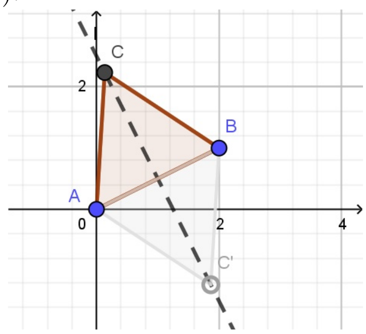
Usamos además que por ser C y B ambas ortonormales, $M_{CB}^{-1}=M_{CB}^t$. Operando queda:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{CB}^t=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9&-20&12\\20&0&-15\\12&15&16\end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones del giro son:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9&-20&12\\20&0&-15\\12&15&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$$

7.– *En plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sean A, B, C los vértices de un triángulo equilátero situado en el semiplano $y \geq 0$, con $A = (0,0)$ y $B = (2,1)$.*



(i) *Calculas las coordenadas de C.*

Sea (a, b) las coordenadas de C. Dado que es un triángulo equilátero tiene que cumplirse que:

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C)$$

Donde:

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5} \\ d(A, C) &= \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ d(B, C) &= \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5} \end{aligned}$$

Igualando distancias y elevando al cuadrado obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 5 \\ a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5 &= 5 \end{aligned}$$

Restando $4a + 2b = 5$, es decir, $b = (5 - 4a)/2$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$a^2 + \left(\frac{5-4a}{2}\right)^2 = 5$$

Operando y simplificando:

$$4a^2 - 8a + 1 = 0$$

de donde $a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; usando que $b = (5 - 4a)/2$, obtenemos dos posibles soluciones:

$$C = (1 + \sqrt{3}/2, 1/2 - \sqrt{3}) \qquad \text{ó} \qquad C = (1 - \sqrt{3}/2, 1/2 + \sqrt{3}).$$

Como el triángulo ha de estar en el semiplano $y \geq 0$ la única posibilidad es:

$$C = (1 - \sqrt{3}/2, 1/2 + \sqrt{3}).$$

(ii) *Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que lleve el vértice A en el B.*

El eje de simetría es la mediatriz de un punto y su imagen, es decir, la recta que pasa por el punto medio de ambos y es ortogonal al segmento que los une.

Para hallar las ecuaciones de la simetría necesitamos primero un punto cualquiera del eje. Podemos tomar el punto medio de A y B:

$$M = \frac{A+B}{2} = (2, 1/2).$$

Las ecuaciones son entonces:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1/2 \end{pmatrix}$$

donde T_C es la matriz de la transformación ortogonal correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por el vector director del eje $\vec{u}$

Para calcular T_C primero trabajamos en una base auxiliar $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ donde $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$. Según hemos indicado al principio un vector ortogonal al eje es el vector $\vec{AB} = (2, 1) = \vec{v}$. Imponemos que $\vec{u} = (x, y)$ sea perpendicular a $\vec{v}$:

$$(x, y) \cdot (2, 1) = 0 \iff 2x + y = 0 \iff y = -2x$$

Tomamos $x = 1$ e $y = -2$, es decir, $\vec{u} = (1, -2)$. En la base $B = \{(1, -2), (2, 1)\}$ la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos del cambio de base a la canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}, \qquad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando resulta:

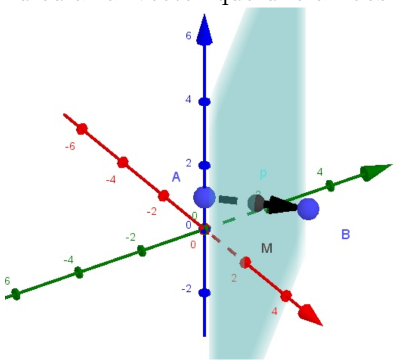
$$T_C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

y finalmente las ecuaciones de la simetría:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1/2 \end{pmatrix}$$

8.– *En el espacio afín euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto* $(0, 0, 1)$ *en el punto* $(2, 2, 1)$.

En una simetría respecto a un plano, el punto medio de un punto y su simétrico yace en en el plano de simetría. Además éste es perpendicular al vector que une ambos puntos.



Por tanto en este caso el plano de simetría pasa por el punto:

$$M = \frac{(0, 0, 1) + (2, 2, 1)}{2} = (1, 1, 1)$$

y tiene por vector normal $(2, 2, 1) - (0, 0, 1) = (2, 2, 0)$. O equivalentemente el vector $(1, 1, 0)$.

Sabemos que entonces las ecuaciones de la simetría son de la forma:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}$$

donde T es la matriz de la simetría respecto a un plano de vector normal $\vec{n} = (1, 1, 0)$.

Para hallar T consideramos una base auxiliar B formada por los generadores del plano y el vector normal. Los generadores son un par de vectores independientes ortogonales a $\vec{n}$:

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 0) = 0 \iff x + y = 0 \iff y = -x.$$

Tomamos un par de vectores cumpliendo esta ecuación y con el vector normal, la base B:

$$B = \{\underbrace{(1, -1, 0), (0, 0, 1)}_{plano}, \underbrace{(1, 1, 0)}_{plano^{\perp}}\}.$$

En esta base sabemos que:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

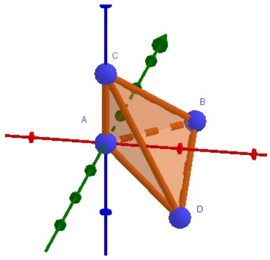
La cambiamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} \qquad \text{donde} \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La simetría queda:

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix}.$$

9.– *En el espacio afín euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *sea el tetraedro de vértices* $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ *y* $D = (1, 0, -1)$. *Calcular su área y su volumen.*



Por defecto trabajamos con el producto escalar usual. En ese caso sabemos que el volumen del tetradro definido por tres vectores viene dado por:

$$Vol = \frac{1}{6}|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}.$$

El área es la suma de las áreas de cada una de las cuatro caras. Estas son triángulos. Usaremos que el área de un triángulo dado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

Cara ABC:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (1, -1, 0).$$

y

$$area(ABC) = \frac{1}{2}\|(1, -1, 0)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Cara ABD:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-1, 1, -1).$$

y

$$area(ABD) = \frac{1}{2}\|(-1,1,-1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Cara ACD:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{e}_2 = (0,1,0).$$

y

$$area(ACD) = \frac{1}{2}\|(0,1,0)\| = \frac{1}{2}.$$

Cara BCD:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (2,-1,1).$$

y

$$area(BCD) = \frac{1}{2}\|(2,-1,1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

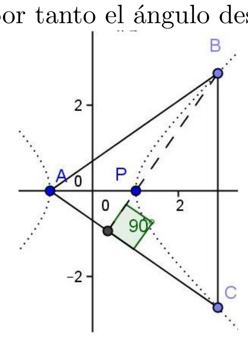
El área total queda:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{6}).$$

13.– *En el plano afín sean los puntos $A(-1,0)$ y $P(1,0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P. ¿Qué tipo de curva es?.+*

Hay dos posibles interpretaciones:

- Los lados iguales son AB y AC, y por tanto el ángulo desigual el A:



En un triángulo isósceles la recta que une el vértice del ángulo desigual con el ortocentro es un eje de simetría. En nuestro caso tal recta, la que une A y P, es el eje OX. Si B tiene coordenadas (x,y) su simétrico respecto al eje OX es el punto C, $(x,-y)$, de forma que los tres vértices del triángulo son ABC.

Para que P sea el ortocentro el lado AC ha de ser perpendicular a la altura de vértice B, es decir, al vecotr BP. Por tanto:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0$$

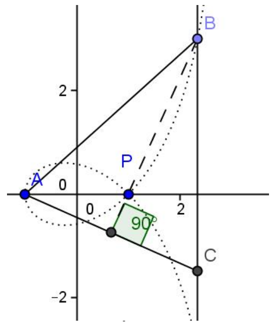
es decir:

$$(x-(-1), -y-0)\cdot(1-x, 0-y) = 0 \iff (1+x)(1-x)+y^2 = 0 \iff x^2-y^2 = 1$$

Vemos que la ecuación del lugar geométrico pedido corresponde a la hipérbola:

$$x^2-y^2 = 1.$$

- Los lados iguales son AB y BC y por tanto el ángulo desigual B:



La altura sobre el lado BC es la recta que une A con el ortocentro; por tanto BC es perpendicular al eje OX. Así si B tiene coordenadas (x, y) entonces C tiene coordenadas (x, y').

Dado que la distancia AB es la misma que BC:

$$(x+1)^2 + y^2 = (y - y'^2) \quad \iff \quad (x+1)^2 = y'^2 - 2yy'$$

Por otra parte la recta BP tiene que ser perpendicular la lado AC, es decir:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0 \iff (x-(-1), -y-0) \cdot (1-x, 0-y') = 0 \iff (1+x)(1-x) + yy' = 0 \iff x^2 - 1 + yy' = 0$$

Despejando y' en la segunda ecuacin y sustiyuendo en la primera se tiene:

$$(x+1)^2 = \frac{(1-x^2)^2}{y^2} - 2(1-x^2)$$

Dividiendo por $x+1$:

$$(x+1) = \frac{(x^2-1)(x-1)}{y^2} + 2(x-1)$$

Quitando denominadores y simplificando obtenemos

$$x^3 - x^2 - x + 1 - xy^2 - 3y^2 = 0,$$

que es la ecuación de una cúbica.

14.– *En el plano afín se considera la circunferencia* $c : (x-3)^2 + y^2 = 3^2$ *y la recta* $r : y - 3 = 0$*. Para cada recta* h *pasando por el origen, sea* A *el punto de intersección (distinto del origen) de* c *y* h *y* B *el punto de intersección de* r *y* h*. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos de intersección de la paralela al eje* OX *por* A *y la paralela al eje* OY *por* B*.*

La circunferencia tiene centro $(3, 0)$ y radio 3; la ecuación simplificada es: $x^2 - 6x + y^2 = 0$.

Tomamos una recta arbitraria h pasando por el origen $x = ay$ (notamos que la recta $y = 0$ no hace falta considerarla porque no corta a r).

Hallamos el punto de corte entre c y h.

$$\begin{cases} 0 = x^2 - 6x + y^2 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$a^2y^2 - 6ay + y^2 = 0 \iff y((1+a^2)y - 6a) = 0$$

de donde $y = 0$ ó $y = \dfrac{6a}{1+a^2}$. Nos quedamos con el corte distinto del origen. Como $x = ay$ queda:

$$A = \left(\frac{6a^2}{1+a^2}, \frac{6a}{1+a^2} \right).$$

Ahora cortamos r y h:

$$\begin{cases} 0 = y - 3 \\ x = ay \end{cases}$$

Queda:

$$B = (3a, 3).$$

La paralela al eje OX por A es $y = \dfrac{6a}{1+a^2}$.

La paralela al eje OY por B es $x = 3a$.

Y la intersección de ambas:

$$x = 3a, \qquad y = \frac{6a}{1+a^2}$$

que son las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico. Para hallar la implícita despejamos el parámetro a en la primera y sustiyuimos en la segunda Queda:

$$y = \frac{2x}{1+(x/3)^2} \iff y = \frac{18x}{x^2+9} \iff yx^2 + 9y - 18x = 0.$$

16.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (1, 2, 2)$.

(i) *Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.*

Método I: Un punto $P = (x, y, z)$ equidista de A y B si:

$$d(P, A) = d(P, B) \iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando resulta:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$$

Simplificando obtenemos el plano de ecuación:

$$y + z - 2 = 0.$$

Método II: Los puntos que equidistan de dos dados en el espacio son aquellos que yacen en el plano mediatriz; es decir el plano que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento que los une. Tenemos:

$$M = \frac{A+B}{2} = (1, 1, 1).$$

El vector $\vec{AB} = (0, 2, 2)$ es perpendicular al plano buscado. Equivalentemente el vector $(0, 1, 1)$ es el vector normal de tal plano. Por tanto éste es de la forma:

$$y + z + d = 0.$$

Imponemos que pase por M:

$$1 + 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2.$$

Así el lugar geomẃetrico pedido es:

$$y + z - 2 = 0.$$

(ii) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.*

Por estar en el plano $z = 2$ el punto es de la forma $C = (a, b, 2)$. Ahora por formar un triángulo isósceles con AB, equidista de A y B y por tanto está en el lugar geométrico hallado en el apartado anterior:

$$b + 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Es decir $C = (a, 0, 2)$. Finalmente $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$. Pero:

$$Area(ABC) = \frac{base \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AB}\|\|\vec{MC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+2^2+2^2}\sqrt{(a-1)^2+(-1)^2+1^2}}{2} = \sqrt{2((a-1)^2+2)}$$

Igualando $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$ queda:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2((a-1)^2+2)} \quad \Rightarrow \quad 6 = (a-1)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = \pm 2.$$

Vemos que hay dos soluciones (la solución no es por tanto única):

$$a = 3 \text{ ó } a = -1.$$

Es decir:

$$C = (3, 0, 2) \text{ ó } C = (-1, 0, 2).$$

ÁLGEBRA LINEAL II — Solución a los problemas adicionales

Geometría afín. (Curso 2023–2024)

I.– *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p,q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del trángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C. Vector normal $\bar{AB} = (1,0)$, como pasa por $C = (c,d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B. Vector normal $\bar{AC} = (c,d)$, como pasa por $B = (1,0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A. Vector normal $\bar{BC} = (c-1,d)$, como pasa por $A = (0,0)$ queda:

$$(c-1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c-1)c + d(c - c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (2,0,1),\ D = (1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

Las ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD},$$

es decir:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta).$$

La proyección buscada A' pertence a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\vec{AA'} \perp \vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(1, 0, 1)^t = 0$$

$$\vec{AA'} \perp \vec{BD} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(0, 1, 1)^t = 0$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$4\alpha + 3\beta = -2$$
$$3\alpha + 5\beta = 0$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta) = (\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}).$$

III.– *En el plano afín euclídeo* $\mathbb{R}^2$ *sean las rectas* $r : x + y = 1$ *y* $s : x = 3$ *y el punto* $P = (2, 2)$.

(i) *Hallar la ecuación de una recta* t *que pase por* P *de manera que éste sea el punto medio de los puntos de corte de* t *con las rectas* r *y* s.

Un punto geńerico $A = (a, b)$ de la recta r cumple $a + b = 1$ y por tanto es de la forma $A = (a, 1 - a)$.

Un punto geńerico $B = (c, d)$ de la recta s cumple $c = 3$ y por tanto es de la forma $B = (3, d)$.

Para que $P = (2, 2)$ sea el punto medio tiene que cumplirse que:

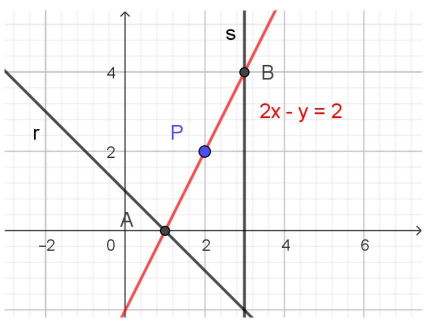
$$P = \frac{A + B}{2} \iff 2P = a + b \iff (4, 4) = (a, 1 - a) + (3, d)$$

de donde:

$$4 = a + 3, \qquad 4 = 1 - a + d$$

Resolviendo $a = 1$ y $d = 4$. Por tanto $A = (1, 0)$ y $B = (3, 4)$ y la recta pedida es la que une ambos puntos:

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 0}{4 - 0} \iff 4x - 2y - 4 = 0 \iff 2x - y - 2 = 0.$$



(ii) *Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleve el punto* P *en el origen y cuadruplique áreas.*

Si k es la razón y cuadriplica áreas significa que $k^2 = 4$. Por tanto $k = \pm 2$ y habrá dos posibles homotecias cumpliendo lo pedido.

Por otra parte si $C=(p,q)$ es el centro de la homotecia, su ecuación es:

$$f(x,y)=(p,q)+k((x,y)-(p,q))$$

Si lleva $P(2,2)$ en el origen cumple:

$$(0,0)=(p,q)+k((2,2)-(p,q)) \iff (2k,2k)=(k-1)(p,q) \iff (p,q)=\frac{(2k,2k)}{k-1}.$$

Para $k=2$ queda:

$$(p,q)=\frac{(2k,2k)}{k-1}=(4,4)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x,y)=(4,4)+2((x,y)-(4,4)) \iff f(x,y)=(2x-4,2y-4)$$

Para $k=2$ queda:

$$(p,q)=\frac{(2k,2k)}{k-1}=(4,4)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x,y)=(4,4)+2((x,y)-(4,4)) \iff f(x,y)=(2x-4,2y-4)$$

Para $k=-2$ queda:

$$(p,q)=\frac{(2k,2k)}{k-1}=(4/3,4/3)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x,y)=(4/3,4/4)-2((x,y)-(4/3,4/4)) \iff f(x,y)=(-2x+4,-2y+4)$$

IV.– *En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:*

- $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,0)$, $C=(0,1,1)$.

- El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P=(0,10,9)$.

- El vértice D equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

El volumen de la pirámide es:

$$V=\frac{base\cdot altura}{3}.$$

El área de la base es la del triángulo ABC:

$$\frac{1}{2}|||\vec{AB}\times\vec{AC}||| = \frac{1}{2}|||(0,-1,1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

La altura es la distancia del punto D a ABC; pero como el plano que contiene a D y es paralelo a ABC también pasa por $P=(0,10,9)$, $dis(D,ABC)=dis(P,ABC)$. El plano ABC tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \iff y-z=0.$$

La altura queda por tanto:

$$h=\frac{|10-9|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El volumen pedido será:

$$V = \frac{(\sqrt{2}/2)\cdot(1/\sqrt{2})}{3} = \frac{1}{6}.$$

(ii) *Hallar las coordenadas del vértice D.*

El vértice D se encuentra en el plano paralelo a ABC (cuya ecuación hemos calculado antes $y - z = 0$) y pasando por P. Tal plano es de la forma:

$$y - z + k = 0$$

e imponiendo que pase por P queda $10 - 9 + k = 0$, de donde $k = 1$. Deducimos que el plano que contiene a D tien por ecuación:

$$y - z - 1 = 0.$$

y por tanto podemos tomar D como:

$$D = (a, b+1, b)$$

Ahora usamos que el punto D equidista de los otros tres:

$$\begin{aligned} d(A,D) = D(B,D) &\iff \sqrt{a^2 + (b+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2 + b^2} \\ d(A,D) = D(C,D) &\iff \sqrt{a^2 + (b+1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (b-1)^2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y simplificando queda:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a - 1 \\ 0 &= 4b \end{aligned}$$

Obtenemos que $a = 1/2$ y $b = 0$, con lo que $D = (1/2, 1, 0)$.

(iii) *Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.*

El plano está generado por los vectores $\vec{AB} = (1,0,0)$ y $\vec{AC} = (0,1,1)$. Un vector perpendicular a ambos es el vector normal al plano ABC, $(0,1,-1)$. Construimos una base con esos tres vectores:

$$B' = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,-1)\}.$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{CB'} F_{B'} M_{CB'}^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciónes de la simetría son (teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la misma):

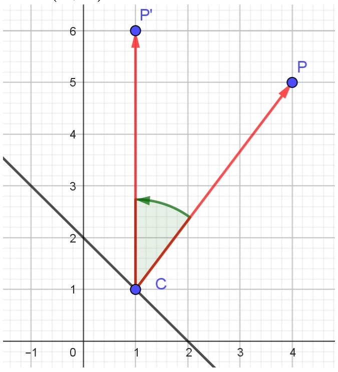
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(iv) *Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.*

Simplemente usamos la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

V.– *En el plano afín $\mathbb{R}^2$ calcular las ecuaciones de un giro con centro en un punto de la recta $x+y-2=0$ y que lleve el punto $(4,5)$ en el punto $(1,6)$.*



Dado que un giro conserva las distancias y el centro permanece fijo al girar, el punto $P=(4,5)$ y su transformado $P'=(1,6)$ han de equidistar del centro.

Además por pertenecer a la recta $x+y-2=0$ sus coordenadas son de la forma $(a,2-a)$. Imponemos que equidiste de $(4,5)$ y $(1,6)$:

$$\sqrt{(a-4)^2+(-3-a)^2}=\sqrt{(a-1)^2+(-4-a)^2}$$

Elevando al cuadrado, simplificando y resolviendo se obtiene $a=1$ y el centro es el punto $C=(1,1)$.

Ahora las ecuaciones de giro son:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} x-1\\ y-1\end{pmatrix}$$

donde T es la matriz de giro de la forma:

$$T=\begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A)\\ sin(A) & cos(A)\end{pmatrix}.$$

Dado que lleva el vector $\vec{CP}=P-C=(3,4)$ en el vector $\vec{CQ}=(0,5)$:

$$\begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A)\\ sin(A) & cos(A)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 5\end{pmatrix}$$

de donde:

$$3cos(A)-4sin(A)=0,\quad 3sin(A)+4cos(A))=5$$

Resolviendo:

$$cos(A)=4/5,\qquad sin(A)=3/5$$

y las ecuaciones de giro quedan:

$$f\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1\\ y-1\end{pmatrix}$$

VI.– *En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r\equiv\begin{cases} x+y+12=0\\ z=5\end{cases},\qquad s\equiv(x,y,z)=(1,2,2)+\lambda(0,1,2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$x = a, \quad y = -12 - a, \quad z = 5$$

y su vector director $(1, -1, 0)$; por tanto un punto P de tal recta es de la forma $P = (a, -12 - a, 5)$.

Un punto Q de la recta s es de la forma $Q = (1, 2 + b, 2 + 2b)$.

La distancia $d(P, Q)$ coincide con la distancia buscada $d(r, s)$ cuando el vector PQ es perpendicular a las dos rectas dadas:

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3).$$

Imponemos las condiciones de perpendicularidad. Hay que recordar que para hacer los productos escalares hay que usar la matiz de Gram dada:

$$PQ \perp (1, -1, 0) \iff PQ \cdot (1, -1, 0) = 0 \iff (1-a, 14+a+b, 2b-3)G_C(1, 1, 0)^t = 0 \iff -7-2a-5b = 0.$$

y

$$PQ \perp (0, 1, 2) \iff PQ \cdot (0, 1, 2) = 0 \iff (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3)G_C(0, 1, 2)^t = 0 \iff 34 + 5a + 29b = 0.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a = b = -1$$

Por tanto

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3) = (1 + 1, 14 - 1 - 1, 2(-1) - 3) = (2, 12, -5)$$

La distancia pedida es la norma del vector $\vec{P}Q$; recordemos de nuevo usar la matriz de Gram para calcularla:

$$\|PQ\| = \sqrt{(2, 12, -5)G_C(2, 12, -5)^t} = \sqrt{33}.$$

VII.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ forman con el plano Π un ángulo de $60°$.*

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \iff x + y + z - 1 = 0$$

Dado un punto (x, y, z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90 - 60 = 30$ grados. El vector normal al plano es $(1, 1, 1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$cos(30) = \frac{(1, 1, 1)(x - 1, y - 2, z - 2)}{\|(1, 1, 1)\|\|(x - 1, y - 2, z - 2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 22x + 4y + 4z - 19 = 0$$

VIII.– *En el espacio afín sean los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,1,1)$.*

a) *Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x+z=2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?.*

Sea $C=(a,b,c)$. Por estar en el plano $x+z=2$ se cumple $a+c=2$. Además para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$\begin{aligned} d(A,B)=d(A,C) &\iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2} \iff \\ &\iff 2=(1-a)^2+(1-b)^2+c^2 \\ d(A,B)=d(B,C) &\iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(0-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2} \iff \\ &\iff 2=a^2+(1-b)^2+(1-c)^2 \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones y simplificando queda:

$$0=1-2a-1+2c \iff a=c$$

Como además $a+c=2$ obtenemos $a=c=1$. Sustituyendo ahora en la primera ecuación:

$$2=(1-1)^2+(1-b)^2+1^2 \iff (1-b)^2=1 \iff b=0 \text{ ó } b=2.$$

Hay dos soluciones (la solución no es única):

$$C=(1,0,1) \text{ ó } C=(1,2,1).$$

b) *Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.*

Si llamamos O al origen el volumen pedido es:

$$V=\frac{1}{6}|det(OA,OB,OC)|$$

Cuando $C=(1,0,1)$ queda:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{3}.$$

Cuando $C=(1,2,1)$:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}\right\|=0.$$

(este volumen 0 se explica por que en este caso el origen está en el mismo plano que contiene al triángulo y por tanto sería una pirámide "degenerada" en el sentido de que el vértice superior está contendio en el mismo plano que la base.)

IX.– *En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2+2y^2=4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x=y$.*

La ecuación de C es:

$$x^2+2y^2=4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x=y$ es:

$$x=y+c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y+c)^2+2y^2=4 \quad \Rightarrow \quad 3y^2+2cy+c^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{c}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1 = -\frac{c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_1 = y_1 + c.$$

$$y_2 = -\frac{c}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_2 = y_2 + c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). El punto medio es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (2c/3, -c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x, y) = (2c/3, -c/3)$$

o de ecuación implícita $x = -2y$.

Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0,1)$. Para cada recta r pasando por el punto P, llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.*

Método I: Consideramos el haz de rectas de puntos pasando por $(0,1)$. Está generado por dos rectas que pasan por él, por ejemplo, $x = 0$ e $y - 1 = 0$. El haz es de la forma:

$$\lambda x + (y - 1) = 0.$$

(de esta forma exlcuímos la recta $x = 0$: pero eso no es problema, dicha recta es la única que no corta a la parábola dada en dos puntos por lo que no interviene en la construcción).

Intersecamos la recta con la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + (y-1) = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda x + x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_1 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

y

$$x_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_2 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (\frac{-\lambda}{2}, 1 + \frac{\lambda^2}{2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \quad y = 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Para hallar la ecuación implícita del lugar geométrico despejamos el parámetro en la primera ecuación y sustituimos en la segunda. Queda:

$$y = 1 + 2x^2 \iff 2x^2 - y + 1 = 0.$$

Se trata de una cónica de matriz asociada A y de términos cuadráticos T:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $det(A) \neq 0$ y $det(T) = 0$ se trata de una parábola.

Método II: Una recta tiene por ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

Imponemos que pase por el punto $(0, 1)$:

$$b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b$$

La ecuación queda:

$$ax + by - b = 0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by - b = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad ax + bx^2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_1 = 1 - \frac{ax_1}{b} = 1 - \frac{-a^2 + a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

y

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_2 = 1 - \frac{ax_2}{b} = 1 - \frac{-a^2 - a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (\frac{-a}{2b}, 1 + \frac{a^2}{2b^2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

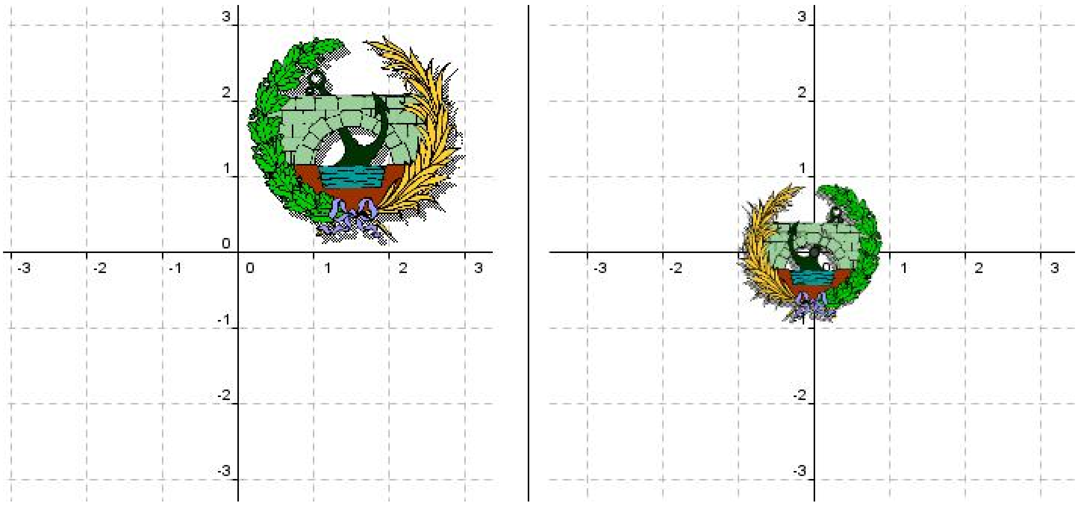
$$x = \frac{-a}{2b}, \quad y = 1 + \frac{a^2}{2b^2}$$

Despejando a en la primera ecuación y sustiyuendo en la segunda queda:

$$y = 1 + \frac{4b^2x^2}{2b^2} = 1 + 2x^2.$$

Ahora conluimos como en el método anterior.

XII.– *Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura el la otra.*



Dividiremos la transformación en varios pasos.

Observamos que el tamaño de la figura final es 2/3 el de la inicial. Hacemos una homotecia centrada en el origen y de razón 2/3.

$$f_1(x, y) = \frac{2}{3}(x, y).$$

Vemos que la figura que queremos obtener es simétrica de la que tenemos ahora respecto de una recta paralela al eje y. Hacemos la simetría respecto de ese eje:

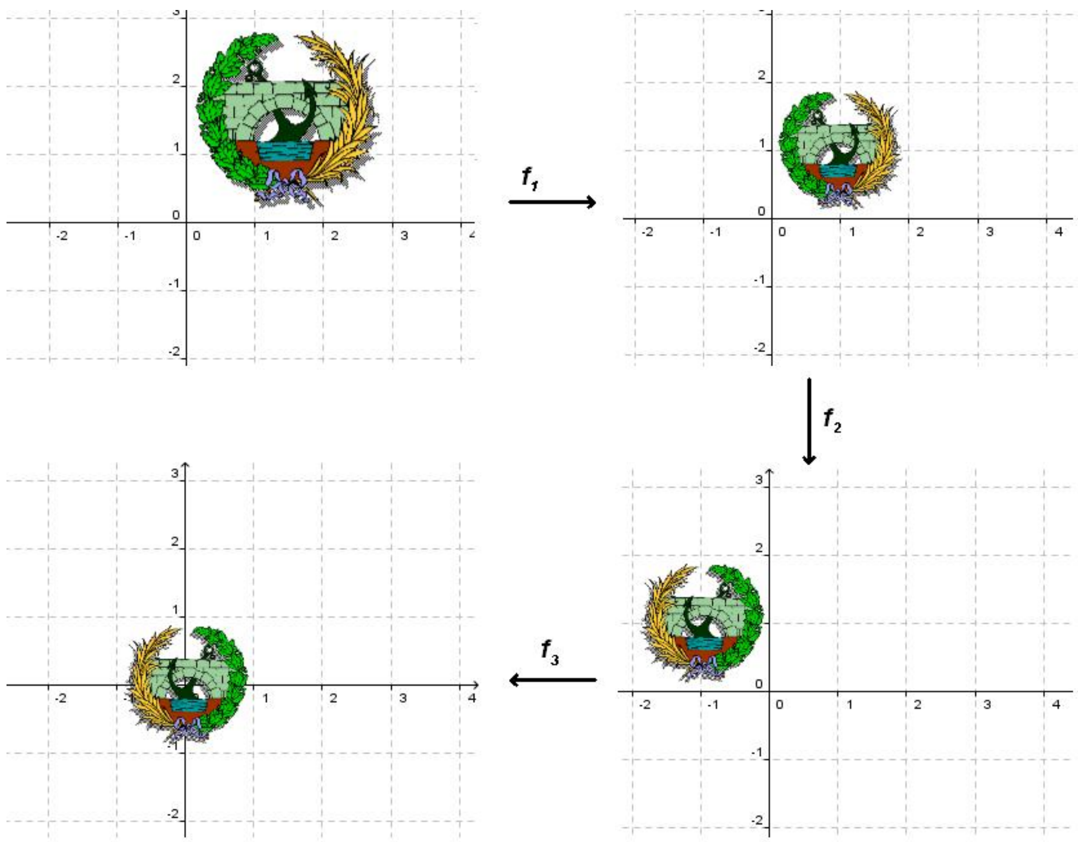
$$f_2(x, y) = (-x, y).$$

Finalmente tenemos que trasladar la figura. El vértice $(-2, 2)$ ha de ser el $(-1, 1)$. Por tanto trasladamos según el vector $(1, -1)$:

$$f_3(x, y) = (x, y) + (1, -1).$$

La transformación pedida es la composición de las tres:

$$f(x, y) = f_3(f_2(f_1(x, y))) = f_3(f_2(2x/3, 2y/3)) = f_3(-2x/3, 2y/3) = (1, -1) + \frac{2}{3}(-x, y).$$



XIII.– *Supongamos que escogemos* 2011 *puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?*

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la trasnformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$f_1(X) = 2P_1 - X$$
$$f_2(f_1(X)) = 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X$$
$$f_3(f_2(f_1(X)) = 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \ldots + P_3 - P_2 + P_1.$$

XIV.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos* $A = (-1, 4)$ *y* $B = (1, 5)$ *respectivamente en* $A' = (3, 4)$ *y* $B' = (5, 3)$*. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.*

Tenemos en cuenta que el centro de un giro pertenece a la mediatriz del segmento que une un punto con su imagen. Por tanto calcularemos la mediatriz de AA' y de BB'; la intersección de ambas será el centro de giro.

El punto medio de AA' es:
$$M_1 = \frac{A + A'}{2} = (1, 4).$$
La mediatriz es la recta que pasa por M_1 y tiene como vector normal el $AA' = (4, 0)$:
$$4x + d = 0.$$
Imponiendo que pase por M_1:
$$4 + d = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d = -4.$$
Por tanto la mediatriz de AA' es la recta $x - 1 = 0$.

El punto medio de BB':
$$M_2 = \frac{B + B'}{2} = (3, 4).$$
La mediatriz es la recta que pasa por M_2 y tiene como vector normal el $BB' = (4, -2)$:
$$4x - 2y + c = 0.$$
Imponiendo que pase por M_2:
$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + c = 0 \qquad \Rightarrow \quad c = -4.$$
Por tanto la mediatriz de BB' es la recta $2x - y - 2 = 0$.

El centro es la intersección de ambas:
$$\left.\begin{array}{r} x - 1 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C = (x, y) = (1, 0).$$

Ahora el giro debe de llevar el vector $CA = (-2, 4)$ en el vector $CA' = (2, 4)$, por tanto el ángulo de giro α cumplirá:
$$cos(\alpha) = \frac{(-2, 4) \cdot (2, 4)}{\|(-2, 4)\| \|(2, 4)\|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$
El sentido de giro es la orientación de la base $B = \{(-2, 4), (2, 4)\}$:
$$signo(det(M_{CB})) = signo\left(det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right) = signo(-16) < 0.$$
Se trata por tanto de un giro de centro $(1, 0)$ y ángulo de giro:
$$\alpha = -arcos(3/5).$$
El seno del ángulo es por tanto:
$$sin(\alpha) = -\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = -4/5.$$
Las ecuaciones de giro quedan:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

XV.– *En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b - a)$$

y ha de ser perpendicular a s, luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad (1, 0, -2)(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, -b)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + b\lambda/2 \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + x/2 \quad \Rightarrow \quad 2yz + 3x - xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)