

1.— Se considera el espacio vectorial euclídeo \mathbb{R}^3 referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

(a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$;

Calculamos una base del subespacio ortogonal a $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$:

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}^\perp = \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$$

La matriz de la simetría en la base $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ es:

$$S_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(**Observación:** Para las *simetrías* no es necesario que la base que se utiliza sea *ortonormal*, basta tomar una base cualquiera formada por bases arbitrarias de la dirección con respecto a la cual se hace la simetría y su subespacio ortogonal. Sin embargo para los *giros* si hay que escoger una base *ortonormal*.)

Para calcular la matriz en la base inicial hacemos el cambio de base:

$$\begin{aligned} S_{CC} &= M_{CB} S_{BB} M_{CB}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$;

De nuevo calculamos el ortogonal:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}^\perp = \mathcal{L}\{(1, 1, -2)\}$$

Por tanto en la base $B = \{(1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, -2)\}$ la matriz es:

$$S_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Haciendo el cambio de base obtenemos:

$$S_{CC} = M_{CB} S_{BB} M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

(c) la rotación de 60° alrededor del semieje que contiene al $(1, 1, 1)$ (considerando en \mathbb{R}^3 la orientación correspondiente a la base de partida).

Tomamos una base ORTONORMAL del ortogonal a $(1, 1, 1)$:

$$\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}^\perp = \mathcal{L}\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$$

Consideramos la base $B = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$ y comprobamos que tiene la orientación adecuada viendo que el determinante formado por estos vectores es positivo. Si no fuese así cambiamos de orden los dos últimos vectores o de signo uno de ellos. Ahora la matriz de la rotación en esta base es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(60) & -\sin(60) \\ 0 & \sin(60) & \cos(60) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Para calcularla en la base canónica hacemos el cambio. Hay que tener en cuenta que por ser las dos bases ortonormales, la inversa de la matriz de paso coincide con su traspuesta:

$$\begin{aligned} T_{CC} &= M_{CB} T_{BB} M_{CB}^{-1} = M_{CB} T_{BB} M_{CB}^t = \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^t = \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.— En \mathbb{R}^3 se considera el producto escalar cuya matriz de Gram respecto a la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de un giro de 36.87° de semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$ y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Observación: $\sin(36.87^\circ) = \frac{3}{5}$.

Construimos una base ortogonal teniendo como primer vector el generador del semieje. Los vectores perpendiculares a $(1, 0, 0)$ cumplen:

$$(1, 0, 0)G(x, y, z)^t = 0 \iff x + y + z = 0. \quad (I)$$

Escogemos un vector satisfaciendo esta ecuación: $(1, -1, 0)$. Los vectores perpendiculares a éste han de verificar:

$$(1, -1, 0)G(x, y, z)^t = 0 \iff -y - z = 0. \quad (II)$$

Seleccionamos un tercer vector verificando simultáneamente (I) y (II). Por ejemplo $(0, 1, -1)$.

Tenemos la base ortogonal:

$$B = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$$

Comprobamos si tiene orientación positiva. Equivalentemente si la matriz de cambio de base a la canónica tiene determinante positivo:

$$\det(M_{CB}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

La normalizamos dividiendo cada vector por su norma:

$$\begin{aligned} \|(1, 0, 0)\| &= \sqrt{(1, 0, 0)G(1, 0, 0)^t} = 1 \\ \|(1, -1, 0)\| &= \sqrt{(1, -1, 0)G(1, -1, 0)^t} = 1 \\ \|(0, 1, -1)\| &= \sqrt{(0, 1, -1)G(0, 1, -1)^t} = 1 \end{aligned}$$

Resultan ser los tres unitarios y así tenemos la base ortonormal:

$$B = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$$

Respecto de esta base, siendo $A = 36.87^\circ$, la matriz de giro es:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(A) & -\sin(A) \\ 0 & \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

(donde $\cos(A) = \sqrt{1 - \sin(A)^2} = 4/5$). Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$F_{CC} = M_{CB}F_{BB}M_{BC} = M_{CB}F_{BB}M_{CB}^{-1}$$

Siendo:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando nos queda:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1/5 & -6/5 \\ 0 & 3/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

- 4.— En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Demostrar que es una transformación ortogonal. Clasificarla y describirla geoméricamente.

Dado que estamos trabajando con el producto escalar usual, la base canónica es ortonormal. Una endomorfismo es una transformación ortogonal si y sólo si su matriz asociada T respecto a una base ortonormal cumple $TT^t = Id$. En este caso vemos que:

$$T_C T_C^t = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = Id$$

y por tanto efectivamente es una transformación ortogonal.

Para clasificarla comenzamos calculando su determinante:

$$\det(T_C) = -4/27 - 4/27 - 4/27 - 8/27 - 8/27 + 1/27 = -27/27 = -1.$$

Se trata entonces de un giro compuesto con una simetría respecto a un plano perpendicular al eje de giro.

El ángulo α de giro cumple:

$$\alpha = \pm \arccos((1 + \text{traza}(T_C))/2) = \pm \arccos(1) = 0.$$

Por tanto en realidad no hay giro (o es trivial: de cero grados) y simplemente se trata de una simetría respecto a un plano. El plano de simetría está formado por los vectores que no varían al transformarse, es decir, los autovectores asociados al 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x/3 - y/3 + 2z/3 = 0 \\ -x/3 - y/3 + 2z/3 = 0 \\ 2x/3 + 2/3 - 4z/3 = 0 \end{cases}$$

Nos queda una única ecuación independiente:

$$-x/3 - y/3 + 2z/3 = 0 \iff x + y - 2z = 0.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $x + y - 2z = 0$.

- 5.— En el espacio euclídeo \mathbb{R}^2 con el producto escalar usual se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t(x, y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \right)$. Probar que t es una transformación ortogonal y describirla geoméricamente indicando si procede el ángulo de giro o el eje de simetría.

La matriz asociada al endomorfismo en la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Para que sea una transformación ortogonal respecto al producto escalar usual basta verificar que $TT^t = Id$:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla hallamos su determinante. $\det(T) = -1$ y por tanto se trata de una simetría respecto a una recta.

El eje de simetría está generado por el autovector asociado al 1:

$$(T - I)(x, y)^t = (0, 0)^t \iff -2x + 4y = 0 \iff (x, y) \parallel (2, 1).$$

Es una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(2, 1)\}$.

- 6.— En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se considera el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica:

- (iii) ¿Es posible conseguir la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?. Razona la respuesta

Es imposible. La composición de dos giros es un giro, porque ambas son transformaciones directas con matriz asociada de determinante positivo. Sin embargo una simetría respecto a un plano es una transformación inversa, con determinante negativo.

- 8.— Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:

- (i) Si T es la matriz de una transformación ortogonal en \mathbb{R}^2 y $\text{traza}(T) = 1$ entonces T es un giro. (0.5 puntos)

VERDADERO. En el plano una transformación ortogonal o bien es un giro o bien es una simetría respecto a una recta. Si es una simetría la matriz asociada en una base adecuada es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\text{traza}(T_B) = 1 + (-1) = 0$. La traza se conserva por cambio de base, entonces en ese caso tendría que ocurrir que $\text{traza}(T) = \text{traza}(T_B) = 0$. Pero nos dicen que $\text{traza}(T) = 1$. Por tanto no es una simetría y necesariamente es un giro.

- (ii) Si T es la matriz de un giro en \mathbb{R}^2 entonces no tiene autovalores reales. (0.5 puntos)

FALSO. Por ejemplo si es un giro de cero grados la matriz asociada es la identidad $T = Id$ y el 1 es autovalor.

- (iii) Si consideramos el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 con las condiciones usuales, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de una simetría respecto al plano $x - y = 0$. (0.5 puntos)

VERDADERO. En \mathbb{R}^3 una transformación ortogonal es:

- Un giro, si el determinante de su matriz asociada es 1.

- Un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro, si el determinante de su matriz asociada es -1 .

En este caso $\det(T) = -1$, por lo que estamos en el segundo caso. El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T) \iff \alpha = \pm \arccos\left(\frac{1 + \text{traza}(T)}{2}\right) = \pm \arccos\left(\frac{1 + 1}{2}\right) = 0$$

Por tanto el giro es de cero grados y en realidad se trata simplemente de la simetría respecto a un plano. El plano de simetría son los autovectores asociados al 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

- (iv) En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 (condiciones usuales) se da una transformación ortogonal t . Gauss sostiene que es un giro de 90 grados y Euler que es un giro de -90 grados. ¿Pueden estar ambos en lo cierto? (0.5 puntos)

SI. Basta tener en cuenta que si cambiamos el semieje de giro de sentido cambia el signo del ángulo. Por ejemplo, consideramos la matriz de una transformación:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

el ángulo de giro es:

$$\alpha = \pm \arccos\left(\frac{\text{traza}(T) - 1}{2}\right) = \pm 90^\circ$$

El semieje de giro es cualquier autovector asociado al 1. Podemos tomar $(1, 0, 0)$ pero también $(-1, 0, 0)$.

- Si el semieje es $\vec{u}_1 = (1, 0, 0)$ para ver el signo del ángulo tomamos una base:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{v}, T\vec{v}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

siendo \vec{v} un vector cualquiera independiente del semieje. El signo del ángulo es $\text{signo}(\det(M_{CB})) = \text{signo}(1)$. Es por tanto un giro de semieje $(1, 0, 0)$ y ángulo $+90^\circ$.

- Si el semieje es $\vec{u}_1 = (-1, 0, 0)$ hacemos lo análogo:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{v}, T\vec{v}\} = \{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

siendo \vec{v} un vector cualquiera independiente del semieje. El signo del ángulo es $\text{signo}(\det(M_{CB})) = \text{signo}(-1)$. Es por tanto un giro de semieje $(-1, 0, 0)$ y ángulo -90° .

- 9.**— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal t en el espacio euclideo \mathbb{R}^3 . Sabiendo que $\det(T) < 0$, $t(1, 1, 2) = (-1, -1, -2)$ y $\text{traza}(T) = 1$, clasificar y describir geoméricamente la transformación t .

Dado que $\det(T) < 0$ se trata de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

Si llamamos α al ángulo de giro se cumple que:

$$\text{traza}(T) = -1 + 2\cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\text{traza}(T) + 1}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Por tanto el giro es ángulo cero y así es simplemente una simetría respecto a un plano. En tal simetría los únicos vectores cuya imagen es el propio vector cambiado de signo son los perpendiculares al plano. Como sabemos que $t(1, 1, 2) = -(1, 1, 2)$ se deduce que el plano de simetría es perpendicular al vector $(1, 1, 2)$.

En resume se trata de una simetría respecto al plano de ecuación $x + y + 2z = 0$.

14.— En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 se considera la aplicación lineal $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar para que valores de a y b , t es una transformación ortogonal.

Dado que trabajamos con el producto escalar usual y la base canónica es ortonormal, la transformación es ortogonal si y sólo si:

$$T_C^t T_C = Id \iff \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando llegamos a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ 2ab &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación o bien $a = 0$, o bien $b = 0$. Y utilizando además la primera llegamos a cuatro casos:

CASO I: $a = 0$ y $b = 1$.

CASO II: $a = 0$ y $b = -1$.

CASO III: $b = 0$ y $a = 1$.

CASO IV: $b = 0$ y $a = -1$.

(ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificarla y describirla geoméricamente.

Para clasificarlas nos basamos en el determinante de la matriz asociada. Si $\det(T_C) = 1$ se trata de un giro; si $\det(T_C) = -1$ se trata de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro. Tenemos que $\det(T_C) = a^2 - b^2$.

CASO I: $a = 0$ y $b = 1$. $\det(T_C) = 0^2 - 1^2 = -1$. Se trata de un giro compuesto con simetría. El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) + 1)/2) = \pm \arccos(1) = 0.$$

Por tanto en realidad el giro no actúa y se trata simplemente de una simetría respecto a un plano. Éste corresponde a los autovectores de T_C asociados al autovalor 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - z = 0.$$

Conclusión: es una simetría respecto al plano $x - z = 0$.

CASO II: $a = 0$ y $b = -1$. $\det(T_C) = 0^2 - (-1)^2 = -1$. Se trata de un giro compuesto con simetría. En ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) + 1)/2) = \pm \arccos(1) = 0.$$

Denuevo el giro no actúa y se trata simplemente de una simetría respecto a un plano. Corresponde a los autovectores de T_C asociados al autovalor 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + z = 0.$$

Conclusión: es una simetría respecto al plano $x + z = 0$.

CASO III: $a = 1$ y $b = 0$. $\text{Det}(T_C) = 1^2 - (0)^2 = 1$. Se trata de un giro. En ángulo α de giro cumple:

$$1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) - 1)/2) = \pm \arccos(1) = 0.$$

Es un giro de cero grados. La transformación no "hace nada".

Observación: De hecho para $a = 1$ y $b = 0$, T_C es simplemente la matriz identidad.

CASO IV: $a = -1$ y $b = 0$. $\text{Det}(T_C) = (-1)^2 - (0)^2 = 1$. Se trata de un giro. En ángulo α de giro cumple:

$$1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) - 1)/2) = \pm \arccos(-1) = 180^\circ.$$

Es un giro de 180° . Equivalentemente una simetría respecto a una recta. Corresponde a los autovectores de T_C asociados al autovalor 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0, \quad z = 0.$$

Conclusión: es una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}$.

15.— Sea el espacio euclideo \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual y $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si $\det(T_C) = 1$ entonces t es un giro.

FALSO. Podría no ser tan siquiera una transformación ortogonal. Por ejemplo si

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $|T_C| = 1$, pero no es un giro porque no es una transformación ortogonal ya que $T_C \cdot T_C^t \neq Id$.

(ii) Si $\text{traza}(T_C) = 4$ entonces t no es una transformación ortogonal.

VERDADERO. Una transformación ortogonal en el espacio es un giro o un giro compuesto con simetría. En el primer caso la traza de la matriz asociada en cualquier base es $1 + 2\cos(\alpha) \leq 3$ y en el segundo caso $-1 + 2\cos(\alpha) \leq 1$. En ningún caso puede valer 4.

(iii) Si t es una transformación ortogonal y 1 es autovalor de t , entonces t es un giro.

FALSO. Por ejemplo si t es una simetría respecto a un plano no es un giro, y sin embargo todos los vectores del plano de simetría son autovectores asociados al autovalor 1 porque quedan fijos por la simetría.

(iv) Si t es una transformación ortogonal entonces la composición $t \circ t$ es un giro.

VERDADERO. La composición de transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal. Una transformación ortogonal en el espacio o bien es un giro (si su matriz asociada tiene determinante 1) o bien un giro compuesto con simetría (si su matriz asociada tiene determinante -1). Si T es la matriz asociada a t , entonces $T^2 = T \cdot T$ es la matriz asociada a $t \circ t$ y:

$$\det(T^2) = \det(T)^2 = (\pm 1)^2 = 1.$$

y por tanto la composición es un giro.

(v) Si T_C es una simetría respecto a una recta entonces $\det(T_C) = 1$.

VERDADERO. Si es una simetría respecto a una recta, entonces en una determinada base la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con $\det(A') = 1$. Como el determinante se conserva al cambiar de base tenemos que la afirmación es cierta.

(vi) Si $\text{traza}(T_C) = 0$ entonces T_C es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.

FALSO. Si:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

con $\alpha = 120^\circ$ se trata de un giro, pero su traza es $1 + 2\cos(120^\circ) = 0$.

(vii) Si T_C es un giro entonces $\text{traza}(T_C) \geq -1$.

VERDADERO. Recordemos que las trazas de las matrices asociadas a endomorfismos se conservan por cambios de base. Si es un giro en una base adecuada la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

y

$$\text{traza}(T_C) = \text{traza}(A') = 1 + 2\cos(\alpha) \geq 1 + 2 \cdot (-1) = -1.$$

I.— Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal B' , en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a \bar{u}_2 :

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$. Comprobemos si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ tienen la misma orientación que la base B :

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\|\bar{u}_1\|^2 = (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \Rightarrow \|\bar{u}_1\| = 1.$$

$$\|\bar{u}_2\|^2 = (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}.$$

$$\|\bar{u}_3\|^2 = (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

En definitiva tomamos la base $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M_{BB''}^{-1}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.— En \mathbb{R}^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX .

Los semiejes positivos OX, OY, OZ están generados respectivamente por los vectores de la base canónica $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. La transformación ortogonal t que nos piden cumple:

$$t(e_1) = e_2, \quad t(e_2) = e_3, \quad t(e_3) = e_1.$$

Por tanto su matriz asociada respecto de la base cañónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica que $\det(T) = 1$ y $\text{traza}(T) = 0$. Se trata por tanto de un giro de ángulo α dado por:

$$2\cos(\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{3}.$$

El semieje de giro viene dado por un autovector asociado al 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x + z = 0, \quad x - y = 0 \iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}.$$

Finalmente decidimos el signo del ángulo de giro. Nos fijamos en la orientación de $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0) = (0, 1, 0)\}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un giro de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ y semieje generador por $(1, 1, 1)$.

III.— Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

- $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$.

- $\det(F_{CC}) = -1$.

- $\text{traza}(F_{CC}) = 1$.

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $\text{traza}(F_{CC}) = 1$ y $\det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1 . Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

IV.— Consideramos el espacio euclideo \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.

FALSO. Por ejemplo si T es una matriz de giro de 90 grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortonormal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla $TT^t = Id$. Esto equivale a $T^{-1} = T^t$.

(iii) Si T es una simetría respecto a una recta entonces $\text{traza}(T) = -1$.

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza -1 . Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si $\text{traza}(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza -1 , pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.

FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $T^{2012} = Id$ (giro de cero grados) pero T no es una matriz de giro.

VI.— Sea el espacio euclideo \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.

Para que una matriz T asociada a un endomorfismo respecto a una base ortonormal corresponda a una transformación ortogonal ha de cumplir $TT^t = Id$. En nuestro caso:

$$TT^t = \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 2a^2 - b^2 & 0 \\ 2a^2 - b^2 & 2a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la identidad obtenemos las ecuaciones:

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad 2a^2 - b^2 = 0, \quad 2b^2 = 1.$$

Notamos que la primera es la suma de las otras dos (dependiente) luego queda:

$$a^2 = b^2/2, \quad b^2 = 1/2.$$

De donde $b = \pm\sqrt{1/2}$ y obtenemos cuatro soluciones:

- Caso I): $a = 1/2, b = -1/\sqrt{2}$.
- Caso II): $a = 1/2, b = 1/\sqrt{2}$.
- Caso III): $a = -1/2, b = -1/\sqrt{2}$.
- Caso IV): $a = -1/2, b = 1/\sqrt{2}$.

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

Para clasificar la transformación basta saber su traza y su determinante. Tenemos:

$$\det(A) = 4ab^2, \quad \text{traza}(A) = 2a.$$

Entonces:

- Caso I): $\det(A) = 1, \text{traza}(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$.

- Caso II): $\det(A) = 1$, $\text{traza}(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$.

- Caso III): $\det(A) = -1$, $\text{traza}(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1 :

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff x/2 - y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$, compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

- Caso IV): $\det(A) = -1$, $\text{traza}(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1 :

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff x/2 - y/2 + z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1/2, -1/2, -1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$, compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

VII.— En \mathbb{R}^3 consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de \mathbb{R}^3 dada por:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

y f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que f es una transformación ortogonal.

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C :

$$F_{CC} = M_{CB}F_{BB}M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es un base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot F_{CC}^t = Id$.

(b) Clasificar razonadamente f , indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

Vemos que:

$$\det(F) = -1; \quad \text{traza}(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano S_{-1}^\perp compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$\cos(\alpha) = (\text{traza}(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1} :

$$S_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0, 1, 0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), f(1, 0, 0)\} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (3/5, 0, 4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-\arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0, 1, 0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.— Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B . Determinar e interpretar geoméricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raíz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1 . Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2\cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

(i) $\cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector \bar{v}_1 .

(ii) $\cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por \bar{v}_2, \bar{v}_3 compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respectivamente, respecto al vector \bar{v}_1 .

IX.— En \mathbb{R}^3 con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el semieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4, 0, 3)$ y de la segunda $v = (0, 1, 0)$. El ángulo que forman cumple:

$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\| \|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3, 0, 4)$ ó $(3, 0, -4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v , si tomamos como semieje el generado por $(-3, 0, 4)$ la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3, 0, 4), (4, 0, 3), (0, 1, 0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5, 0, 4/5), (4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB}G_B M_{BC} = M_{CB}G_B M_{CB}^{-1} = M_{CB}G_B M_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

X.— En el plano euclídeo \mathbb{R}^2 y dados $a, b, c > 0$ se considera un endomorfismo t de matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 4/5 \\ b & -c \end{pmatrix}$$

Hallar a, b, c para que t sea una transformación ortogonal. Clasificarla y describirla geoméricamente.

Dado que trabajamos con el producto escalar usual (ya que no se indica lo contrario), la base C es una base ortonormal. En ese caso para que la transformación sea ortogonal su matriz asociada en la base canónica ha de cumplir que:

$$T_C^t T_C = Id$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 4/5 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 4/5 \\ b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ \frac{4a}{5} - bc &= 0 \\ \frac{16}{25} + c^2 &= 1 \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene $c^2 = 9/25$. De donde, como $c > 0$, $c = 3/5$. Sustituyendo en la segunda $b = 4a/3$ y reemplazando en la primera:

$$a^2 + \frac{16a^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 9/25$$

Como $a > 0$ se deduce que $a = 3/5$ y $b = 4a/3 = 4/5$. La matriz queda:

$$T_C = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla primero hallamos su determinante. Si es 1 es un giro; si es -1 es una simetría respecto a una recta. En este caso:

$$|T_C| = -9/25 - 16/25 = -1.$$

Se trata de una simetría respecto a una recta. El eje de simetría está generado por el autovector asociado al 1:

$$(T_C - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene $3x - 4y = 0$ o equivalentemente el subespacio $\mathcal{L}\{(4, 3)\}$.

En definitiva es una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(4, 3)\}$.

XI.— En \mathbb{R}^3 se consideran dos vectores independientes \bar{v} y \bar{u} que forman entre sí un ángulo α . Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por \bar{v} y de la simetría respecto del subespacio generado por \bar{u} es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como \bar{u} forma un ángulo α con \bar{v} , las coordenadas de \bar{u} son $(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a \bar{u} que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0), (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Tiene la misma orientación que B . La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector \bar{e}_3 ortogonal al espacio generado por \bar{u} y \bar{v} .

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $\text{traza}(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $\text{Traza} = 3$ si la aplicación es la identidad.
- $\text{Traza} = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.
- $\text{Traza} = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.
- $\text{Traza} = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.
- $-1 < \text{traza} = 1 + 2\cos(A) < 3$ y $\text{traza} \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.
- $-3 < \text{traza} = -1 + 2\cos(A) < 1$ y $\text{traza} \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $\text{traza}(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2\cos(A) = 2 \Rightarrow \cos(A) = 1/2 \Rightarrow A = \pi/3.$$

XIII.— Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:

Recordemos en primer lugar, que la traza de una matriz de una aplicación lineal no depende de la base en la que se trabaje, ya que se conserva por semejanza.

(i) ¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en \mathbb{R}^3 ?

Sabemos que en una base adecuada la matriz asociada a una transformación ortogonal es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{si es un giro}$$

y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{si es un giro compuesto con simetría}$$

En el primer caso la traza es $1 + 2\cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $1 + 2 = 3$.

En el segundo caso la traza es $-1 + 2\cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $-1 + 2 = 1$.

Por tanto el valor máximo de la traza es 3.

- (ii) *¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en \mathbb{R}^3 ?*

Si la transformación es inversa es un giro compuesto con simetría. Según hemos visto en el apartado anterior el valor máximo de su traza es 1.

- (iii) *Si la matriz asociada a un giro en \mathbb{R}^3 tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?*

Según hemos visto en (i) la traza de una matriz de giro es $1 + 2\cos(\alpha)$. Si es nula se deduce que $\cos(\alpha) = -1/2$ y por tanto el ángulo es $\arccos(-1/2) = \pm 120^\circ$.

- (iv) *Si f es una simetría del plano con el producto escalar usual y $f(1, 2) = (-1, -2)$. ¿Cuál es el eje de simetría?*

Vemos que $f(1, 2) = -(1, 2)$. Por tanto $(1, 2)$ es perpendicular al eje de simetría y es el vector normal del eje de giro. Este será entonces: $x + 2y = 0$.

XIV.— Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- (i) *Si T es la matriz asociada a un giro en \mathbb{R}^3 entonces $\text{traza}(T) \geq -1$.*

VERDADERO. Sabemos que la traza de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base porque la traza se conserva por semejanza. Entonces en una base adecuada sabemos que la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$\text{traza}(T) = \text{traza}(T_B) = 1 + 2\cos(\alpha) \leq 1 + 2(-1) = -1.$$

- (ii) *La composición de dos simetrías respecto a una recta en el plano es una nueva simetría respecto a una recta.*

FALSO. Una simetría respecto a una recta en el plano es una transformación inversa; la composición de dos transformaciones inversas es una directa, es decir, un giro.

De hecho, como contraejemplo trivial basta considerar la composición de una simetría respecto a una recta consigo misma. Es claramente la identidad que NO es una nueva simetría respecto a una recta.

- (iii) *Si dos bases tienen la misma orientación entonces el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es 1.*

FALSO. Dos bases tienen la misma orientación si el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es positivo, pero NO necesariamente uno. Por ejemplo $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $B = \{(1, 0), (0, 2)\}$ tienen la misma orientación pero $\det(M_{CB}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 1$.

- (iv) *Si T es una transformación inversa en \mathbb{R}^3 y 1 es autovalor de T entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.*

VERDADERO. Si T es una transformación inversa en \mathbb{R}^3 es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro. Tiene un autovector asociado al -1 que es el precisamente el eje de giro. Si tiene un autovector \vec{v} asociado al 1 ha de ser perpendicular al eje de giro (porque en transformaciones ortogonales autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales). Entonces sobre ese vector \vec{v} actúa el giro; pero si esta asociado al 1 cumple que $t(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ y por tanto el giro es de cero grados.

En resumen la transformación inversa en \mathbb{R}^3 es un giro de **ángulo CERO** compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro, luego es simplemente una simetría respecto a un plano.

(1 punto)

XV.— En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$ y $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1, 0, -1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U .

Para calcular el simétrico del subespacio V basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

Método I: Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio U . Para ello necesitamos una base de U (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de \mathbb{R}^3 con vectores ortogonales:

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot (1, 2, -2) = 0 &\iff x + 2y - 2z = 0 \\(x, y, z) \cdot (1, 1, 0) = 0 &\iff x + y = 0\end{aligned}$$

Por tanto un vector \bar{u}_3 ortogonal a \bar{u}_1 y \bar{u}_2 es:

$$\bar{u}_3 = (2, -2, -1)$$

Ahora en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera V es:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de V es el subespacio generado por el vector $(-1, 4, -1)$.

Método II: Calculamos primero la proyección ortogonal de \bar{v} sobre U . Será un vector $\bar{w} \in U$ verificando que $\bar{w} - \bar{v}$ es ortogonal a U . Sea $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$. Basta imponer que $\bar{w} - \bar{v}$ sea ortogonal a los vectores que generan U :

$$\left. \begin{aligned} a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 &= \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 &= \bar{v} \cdot \bar{u}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 0 \end{cases}$$

Por tanto $w = (1/3, 2/3, -2/3)$. Ahora el simétrico de \bar{v} se construye sumando al vector \bar{w} el vector $\bar{w} - \bar{v}$. Queda:

$$2\bar{w} - \bar{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) - (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.