ÁLGEBRA LINEAL II **Práctica 2.3**

Transformaciones ortogonales (Curso 2022–2023)

1.– *Se considera el espacio vectorial euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:*

(a) *la simetría ortogonal con respecto al subespacio* $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$*;*

Calculamos una base del subespacio ortogonal a $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$:

$$(x,y,z)\cdot(1,1,1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z=0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{(1,1,1)\}^{\perp}=\mathcal{L}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$$

La matriz de la simetría en la base $B=\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1)\}$ es:

$$S_{BB}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(**Observación**: Para las *simetrías* no es necesario que la base que se utiliza sea *ortonormal*, basta tomar una base cualquiera formada por bases arbitrarias de la dirección con respecto a la cual se hace la simetría y su subespacio ortogonal. Sin embargo para los *giros* si hay que escoge una base *ortonormal*.)

Para calcular la matriz en la base inicial hacemos el cambio de base:

$$\begin{aligned}S_{CC}&=M_{CB}S_{BB}M_{CB^{-1}}=\\&=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&2/3&2/3\\2/3&-1/3&2/3\\2/3&2/3&-1/3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) *la simetría ortogonal con respecto al subespacio* $\mathcal{L}\{(1,1,1),(2,0,1)\}$*;*

De nuevo calculamos el ortogonal:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=0\\2x+z=0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{L}\{(1,1,1),(2,0,1)\}^{\perp}=\mathcal{L}\{(1,1,-2)\}$$

Por tanto en la base $B=\{(1,1,1),(2,0,1),(1,1,-2)\}$ la matriz es:

$$S_{BB}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Haciendo el cambio de base obtenemos:

$$S_{CC}=M_{CB}S_{BB}M_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2/3&-1/3&2/3\\-1/3&2/3&2/3\\2/3&2/3&-1/3\end{pmatrix}$$

(c) *la rotación de* 60° *alrededor del semieje que contiene al* $(1,1,1)$ *(considerando en* $\mathbb{R}^3$ *la orientación correspondiente a la base de partida).*

Tomamos una base ORTONORMAL del ortogonal a $(1,1,1)$:

$$\mathcal{L}\{(1,1,1)\}^{\perp}=\mathcal{L}\{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})\}$$

Consideramos la base $B = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$ y comprobamos que tiene la orientación adecuada viendo que el determiante formado por estos vectores es positivo. Si no fuese así cambiamos de orden los dos últimos vectores o de signo uno de ellos. Ahora la matriz de la rotación en esta base es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60) & -sin(60) \\ 0 & sin(60) & cos(60) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Para calcularla en la base canónica hacemos el cambio. Hay que tener en cuenta que por ser las dos bases ortonormales, la inversa de la matriz de paso coincide con su traspuesta:

$$\begin{aligned} &T_{CC} = M_{CB} T_{BB} M_{CB}^{-1} = M_{CB} T_{BB} M_{CB}^t = \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}^t = \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.– *En el espacio vectorial euclideo* $\mathbb{R}^3$ *hallar las ecuaciones de un giro de ángulo* 90^o *y semieje generado por el vector* $(3,0,4)$.

Primero construimos una base ortgononal bien orientada con el primer vector el semieje de giro $\vec{u}_1 = (3,0,4)$.

Buscamos un segundo vector ortogonal al primero:

$$(x,y,z) \cdot (3,0,4) = 0 \iff 3x + 4z = 0.$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2 = (0,1,0)$. Escogemos un vector ortogonal a los dos anteriores:

$$\begin{aligned} (x,y,z) \cdot (3,0,4) = 0 &\iff 3x + 4z = 0 \\ (x,y,z) \cdot (0,1,0) = 0 &\iff y = 0 \end{aligned}$$

Tomamos $\vec{u}_3 = (4,0,-3)$.

Comprobamos si la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ está bien orientada, estudiando el signo del determinante de la matriz de cambio de base con respcto a la base canónica:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -25 < 0$$

Por tanto no está bien orientada. Cambiamos el signo del tercer vector para corregirlo y normalizamos:

$$\frac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|} = (3/5, 0, 4/5), \quad \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = (0,1,0), \quad \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|} = (-4/5, 0, 3/5)$$

Entonces la base $B = \{(3/5,0,4/5), (0,1,0), (-4/5,0,3/5)\}$ es una base ortonormal bien orientada con el primer vector en la misma dirección y sentido que el semieje.

En esa base la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o) \\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente cambiamos la matriz a la base canónica:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{BC} = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1} = M_{CB}T_BM_{CB}^t$$

donde

$$M_{CB} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$ por ser una matriz de cambio de base entre bases ortonormales.

Operando resulta:

$$T_C = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Y las ecuaciones del giro son:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

4.– *En el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es:*

$$T_C = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(i) *Probar que t es una transformación ortogonal.*

Dado que trabajamos con el producto escalar usual, la base canónica es una base ortonormal; entonces que t sea ortogonal equivale a que $T_CT_C^t = Id$. Efectivamente:

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Clasificar t indicando, si procede, el ángulo y eje de giro y/o el plano de simetría.*

Para clasificar calculamos $det(T_C)$. Sabemos que:

- Si $det(T_C) = 1$ se trata de un giro.

- Si $det(T_C) = -1$ se trata de un giro compuesto con una simetría respecto a un plano perpendicular al eje de giro.

$$det\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = -\frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{8}{27} + \frac{1}{27} - \frac{8}{27} = -1.$$

Es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano perpendicular al eje de giro.

El semieje de giro está generado por el autovector asociado al -1:

$$(T_C - (-1)Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 5/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

Simplificando y resolviendo el sistema obtenemos que:

$$S_{-1} = \mathcal{L}\{(2,-1,-1)\}$$

El ángulo α de giro es:

$$\alpha = arccos\left(\frac{traza(T_C)+1}{2}\right) = arccos(1) = 0$$

Es un giro de 0 grados y por tanto realmente, la transformación es simplemente una simetría respecto a un plano.

El plano de simetría es el ortogonal al eje de giro:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)\cdot(2,-1,-1) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y - z = 0\}.$$

5.– *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual se considera el endomorfismo* $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(x,y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$. *Probar que* t *es una transformación ortogonal y describirla geométricamente indicando si procede el ángulo de giro o el eje de simetría.*

La matriz asociada al endomorfismo en la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Para que sea una transformación ortogonal respecto al producto escalar usual basta verificar que $TT^t = Id$:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla hallamos su determinante. $det(T) = -1$ y por tanto se trata de una simetría respecto a una recta.

El eje de simetría está generado por el autovector asociado al 1:

$$(T-I)(x,y)^t = (0,0)^t \iff -2x + 4y = 0 \iff (x,y)||(2,1).$$

Es una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(2,1)\}$.

6.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se considera el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica:*

(i) *De un endomorfismo se conoce su matriz asociada en la base canónica* $T_C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. *Probar que es una transformación ortogonal y clasificarla describiendo geométricamente como actúa.* (1 punto)

Trabajamos en la base canónica y con el producto escalar usual, es decir, respecto a una base ortonormal. Por tanto la condición para que $T_C^t T_C = Id$. Basta hacer las cuentas y comprobarlo.

Para clasificarla comenzamos calculando su determinante. Si es 1 es un giro. Si es -1 es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{vmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{2}} = -1.$$

Es entonces un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro.

El semieje de giro está generado por un autovector asociadalo al autovalor -1:

$$(T_C + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0 = (1 + 1/\sqrt{2})x + y/2 + z/2 \\ 0 = (1 - 1/\sqrt{2})y + z/\sqrt{2} \\ 0 = -x/\sqrt{2} + y/2 + 3z/2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $S_1 = \mathcal{L}\{(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2})\}$.

El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm \arccos \frac{tr(T_C) + 1}{2} = \pm arcos \frac{3}{4}.$$

El signo del ángulo coincide con la orientación de una base formada por el semieje, un vector cualquiera y su imagen:

$$B' = \{(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2}), (1, 0, 0), T_C(1, 0, 0)^t\} = \{(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2}), (1, 0, 0), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\};$$

entonces:

$$signo(\alpha) = signo \begin{vmatrix} 3 - 2\sqrt{2} & 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = signo(\sqrt{2}) = +$$

Finalmente el plano de simetría es perpendicular al semieje. Resumiendo: se trata de un giro de ángulo $+arcos\frac{3}{4}$ con respecto al semieje generado por $(3 - 2\sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2})$ compuesto con una simetría respecto al plano $(3 - 2\sqrt{2})x + y + (1 - \sqrt{2})z = 0$.

(ii) *Calcular la matriz asociada a una simetría respecto al plano de ecuación $x + y - z = 0$.*

Comenzamos calculando una base formada por los generadores del plano de simetría y un vector ortogonal a él. Este último puede ser el vector normal al plano, formado por los coeficientes de la ecuación implícita $(1, 1, -1)$.

Los otros dos lo obtenemos resolviendo paramétricamente la ecuación dada:

$$x + y - z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -x + z$$

de donde:

$$x = a, \quad y = -a + b, \quad z = b$$

y los generadores son $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Entonces tomamos:

$$B = \{\underbrace{(1, -1, 0), (0, 1, 1)}_{plano}, \underbrace{(1, 1, -1)}_{plano^{\perp}}\}$$

En tal base:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente lo cambiamos a la canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B (M_{CB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *¿Es posible conseguir la simetría anterior componiendo adecuadamente dos giros?. Razona la respuesta*

Es imposible. La composición de dos giros es un giro, porque ambas son transformaciones directas con matriz asociada de determinante positivo. Sin embargo una simetría respecto a un plano es una transformación inversa, con determinante negativo.

7.– *Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(iv) *Si t es una transformación ortogonal en* $\mathbb{R}^3$ *y* $t(1,0,1) = (-1,0,-1)$ *entonces se trata de una transformación inversa.*

FALSO. Por ejemplo si consideramos un giro de 180^o respecto a un eje perpendicular al vector $(1,0,1)$, la imagen de éste es su opuesto pero NO es una transformación inversa.

8.– *Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:*

(ii) *Si T es la matriz de un giro en* $\mathbb{R}^2$ *entonces no tiene autovalores reales.* (0.5 puntos)

FALSO. Por ejemplo si es un giro de cero grados la matriz asociada es la identidad $T = Id$ y el 1 es autovalor.

(iii) *Si consideramos el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *con las condiciones usuales,* $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es la matriz de una simetría respecto al plano* $x - y = 0$. (0.5 puntos)

VERDADERO. En $\mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal es:

- Un giro, si el determinante de su matriz asociada es 1.

- Un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro, si el determinante de su matriz asociada es -1.

En ester caso $det(T) = -1$, por lo que estamos en el segundo caso. El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2cos(\alpha) = traza(T) \qquad \iff \qquad \alpha = \pm arcos\left(\frac{1 + traza(T)}{2}\right) = \pm arcos\left(\frac{1+1}{2}\right) = 0$$

Por tanto el giro es de cero grados y en realidad se trata simplemente de la simetría respecto a un plano. El plano de simetría son los autovectores asociados al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0.$$

(iv) *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *(condiciones usuales) se da una transformación ortogonal t. Gauss sostiene que es un giro de 90 grados y Euler que es un giro de -90 grados. ¿Pueden estar ambos en lo cierto?.* (0.5 puntos)

SI. Basta tener en cuenta que si cambiamos el semieje de giro de sentido cambia el signo del ángulo. Por ejemplo, consideramos la matriz de una transormación:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

el ángulo de giro es:

$$\alpha = \pm arcos\left(\frac{traza(T) - 1}{2}\right) = \pm 90^o$$

El semieje de giro es cualquier autovector asociado al 1. Podemos tomar $(1,0,0)$ pero también $(-1,0,0)$.

- Si el semieje es $\vec{u}_1 = (1,0,0)$ para ver el signo del ángulo tomamos una base:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{v}, T\vec{v}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

siendo $\vec{v}$ un vector cualquiere independiente del semieje. El signo del ángulo es $signo(det(M_{CB})) = signo(1)$. Es por tanto un giro de semieje $(1,0,0)$ y ángulo $+90^o$.

- Si el semieje es $\vec{u}_1 = (-1,0,0)$ hacemos lo análogo:

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{v}, T\vec{v}\} = \{(-1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

siendo $\vec{v}$ un vector cualquiere independiente del semieje. El signo del ángulo es $signo(det(M_{CB})) = signo(-1)$. Es por tanto un giro de semieje $(-1,0,0)$ y ángulo -90^o.

10.– *En* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual, hallar razonadamente las matrices asociadas respecto a la base canónica de todas las posibles transformaciones ortogonales inversas que lleven la recta* $x+y=0$ *en la recta* $x-y=0$.

Método I: Una transformación inversa en un plano es una simetría respecto a una recta. El eje de simetía permanece fijo en la transformación y por tanto debe de ser equidistante de las dos rectas, la original y su imagen, ya que una transformación ortogonal conserva distancias.

En otras palabras el eje de simetría debe de ser alguna de las dos rectas (las bisectrices) que equidistan de $x+y=0$ y $x-y=0$. Las calculamos usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$d((x,y),x-y=0)=d((x,y),x+y=0) \iff \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+y}{\sqrt{1^2+1^2}} \iff |x-y|=|x+y|$$

Quitamos el valor absoluto considerando las dos posibilidades para el signo:

$$x-y=x+y \iff y=0 \qquad \text{ó} \qquad x-y=-(x-y) \iff x=0.$$

Los dos posibles ejes de simetría son $y=0$ (eje OX) y $x=0$ (eje OY):

- Simetría repecto al eje OX:

El vector director del eje es $(1,0)$, la base canónica es ortogonal con el primer vector correspondiente al eje de simetría luego directamente:

$$T_C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

- Simetría repecto al eje OY:

El vector director del eje es $(0,1)$, la base $B=\{(0,1),(1,0)$ es ortogonal con el primer vector correspondiente al eje de simetría. Por tanto:

$$T_B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Cambiamos de base a la canónica:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Método II: La matriz asociada a una transformación ortogonal inversa cumple $T_CT_C^t=Id$ y $det(T_C)=-1$. Además para llevar $x+y=0$ en $x-y=0$ debe de llevar el vector director de la primera $(1,-1)$ en el de la segunda con el mismo módulo y dos posibles signos: $(1,1)$ ó $(-1,-1)$.

Sea $T_C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$:

$$T_CT_C^t=Id \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}a^2+b^2=1\\ ac+bd=0\\ c^2+d^2=1\end{cases}$$

Distinguimos las dos posibilidades:

1) Si $t(1,-1)=(1,1)$:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \iff \begin{cases}a-b=1\\ c-d=1\end{cases}$$

de donde $b = a - 1$ y $d = c - 1$. Sustituyendo en $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$:

$$\begin{aligned} &a^2 + (a-1)^2 = 1 \iff 2a^2 - 2a = 0 \iff a(a-1) = 0 \\ &c^2 + (c-1)^2 = 1 \iff 2c^2 - 2c = 0 \iff c(c-1) = 0 \\ &ac + (a-1)(c-1) = 0 \iff ac = -(a-1)(c-1) \end{aligned}$$

Deducimos que:

- O bien $a = 0$, $c = 1$. En este caso $b = -1$ y $d = 0$ y $det(T_C) = 1$. No puede ser.

- O bien $a = 1$, $c = 0$. En esete caso $b = 0$ y $d = -1$ y $det(T_C) = -1$. Es una posible solución: $T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Si $t(1,-1) = (-1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a - b = -1 \\ c - d = -1 \end{cases}$$

de donde $b = a + 1$ y $d = c + 1$. Sustituyendo en $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$:

$$\begin{aligned} &a^2 + (1+a)^2 = 1 \iff 2a^2 + 2a = 0 \iff a(a+1) = 0 \\ &c^2 + (1+c)^2 = 1 \iff 2c^2 + 2c = 0 \iff c(c+1) = 0 \\ &ac + (1+a)(1+c) = 0 \iff ac = -(1+a)(1+c) \end{aligned}$$

Deducimos que:

- O bien $a = 0$, $c = -1$. En este caso $b = 1$ y $d = 0$ y $det(T_C) = 1$. No puede ser.

- O bien $a = -1$, $c = 0$. En esete caso $b = 0$ y $d = 1$ y $det(T_C) = -1$. Es otra posible solución: $T_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12.– *En* $\mathbb{R}^2$ *respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal* $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(i) *Hallar* a *y* b *para que* t *sea una simetría respecto a una recta.*

Para que sea una simetría debe de ser un transformación ortogonal con matriz asociada de determinante -1. Para que sea ortogonal tiene que cumplirse que $T_C T_C^t = Id$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff a^2 + b^2 = 1, \quad 2ab = 0.$$

Para que el determinante sea 1:

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 1 \iff a^2 - b^2 = -1.$$

De las ecuaciones $a^2 + b^2 = 1$ y $a^2 - b^2 = -1$ obtenemos $a = 0$ y $b = \pm 1$. En ese caso se cumple además que $2ab = 0$.

Por tanto hay dos casos:

i) $a = 0$ y $b = 1$.

ii) $a = 0$ $b = -1$.

(ii) *Para cada uno de los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.*

El eje de simetría corresponde a los autovectores de T_C asociados al 1:

i) $a = 0$ y $b = 1$.

$$(T_C - 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

El eje de simetría tiene por ecuación $x - y = 0$ es decir es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,1)\}$.

ii) $a = 0$ y $b = -1$.

$$(T_C - 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

El eje de simetría tiene por ecuación $x + y = 0$ es decir es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,-1)\}$.

14.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *La traza de la matriz asociada a una simetría respecto a una recta en el plano es* 0.

VERDADERO. La traza de la matriz de una aplicación no depende de la base respecto de la cual se trabaja, porque la traza se conserva por semejanza. Entonces si es una simetría en el plano respecto a una recta, en una base adecuada (primer vector el eje de simetría y segundo ortogonal a él) la matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto su traza (respecto a cualquier base) es $1 + (-1) = 0$.

(ii) *Si la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano tiene traza* 0 *entonces es una simetría respecto a una recta.*

FALSO. Por ejemplo si consideramos una matriz de giro de ángulo $\pi/2$:

$$\begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2) \\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene traza 0 y obviamente NO es una simetría respecto a una recta.

(iii) *Una simetría en el espacio respecto a una recta es una transformación inversa.*

FALSO. Una simetría respecto a una recta en el espacio corresponde a un giro de ángulo π. Una matriz de giro tiene determinante positivo y por tanto se trata de una trasnformación directa.

(iv) *En el espacio, la composición de una simetría respecto a un punto y una simetría respecto a un plano siempre es un giro.*

VERDADERO. La matriz asociada a una simetría respecto a punto respecto de cualquier base es $-Id$, tiene determinante -1. La matriz asociada a la simetría respecto a un plano tiene determinante -1 también. Por tanto su composición esta representada por una matriz producto de esas dos y entonces con determinante $(-1)(-1) = 1$: se trata de un giro.

I.– *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:*

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal B', en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a $\bar{u}_2$:

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vecor $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$. Comprobemos si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_e\}$ tienen la misma orientación que la base B:

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\|\bar{u}_1\|^2 = (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_1\| = 1.$$
$$\|\bar{u}_2\|^2 = (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}.$$
$$\|\bar{u}_3\|^2 = (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

En definitiva tomamos la base $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\pi/3) & -sin(\pi/3) \\ 0 & sin(\pi/3) & cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & ' & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M^{-1}_{BB''}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.– *En R^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX.*

Los semiejes positivos OX, OY, OZ están generados respectivamente por los vectores de la base canónica $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. La transformación ortogonal t que nos piden cumple:

$$t(e_1) = e_2, \quad t(e_2) = e_3, \quad t(e_3) = e_1.$$

Por tanto su matriz asociada respecto de la base cañonica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica que $det(T) = 1$ y $traza(T) = 0$. Se trata por tanto de un giro de ángulo α dado por:

$$2cos(\alpha) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad cos(\alpha) = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

El semieje de giro viene dado por un autovector asociado al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x + z = 0, \quad x - y = 0 \iff (x,y,z) \in \mathcal{L}\{(1,1,1)\}.$$

Finalmente decidimos el signo del ángulo de giro. Nos fijamos en la orientación de $\{(1,1,1),(1,0,0),t(1,0,0) = (0,1,0)\}$:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un giro de ángulo $\dfrac{2\pi}{3}$ y semieje generador por $(1,1,1)$.

III.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:*

- $f(1,0,0) = (-1,0,0)$.

- $det(F_{CC}) = -1$.

- $traza(F_{CC}) = 1$.

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $traza(F_{CC}) = 1$ y $det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1. Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1,0,0) = (-1,0,0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x,y,z) \in R^3 | (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

IV.– *Consideramos el espacio ecuclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.*

FALSO. Por ejemplo si T es una matriz de giro de 90 grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) *Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.*

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortonormal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla $TT^t = Id$. Esto equivale a $T^{-1} = T^t$.

(iii) *Si T es una simetría respecto a una recta entonces $traza(T) = -1$.*

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza -1. Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza -1, pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) *Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.*

FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $T^{2012} = Id$ (giro de cero grados) pero T no es una matriz de giro.

V.– *En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector* $(3,4)$ *en el vector:*

a) $(2,6)$.

b) $(4,3)$

Las tranformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ directas son los giros. Además recordemos que una transformación ortogonal debe de conservar el módulo de los vectores. Comenzamos comprobando si el vector inicial y su candidato a vector transformado tienen el mismo módulo:

$$\|(3,4)\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$
$$\|(2,6)\| = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$$
$$\|(4,3)\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$$

Concluimos que:

a) No existe ninguna transformación ortogonal que lleve $(3,4)$ en $(2,6)$ porque ambos vectores no tienen el mismo módulo.

b) Podemos construir un giro que lleve el vector $(3,5)$ en el $(4,3)$, porque ambos tienen el mismo módulo. Sabemos que la matriz de giro respecto de la base canónica y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

El ángulo α de giro cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{(3,4)\cdot(4,3)}{\|(3,4)\|\|4,3\|} = \frac{24}{25}.$$

Entonces:

$$sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-cos(\alpha)^2} = \pm\frac{7}{25}$$

Por tanto la matriz de giro es una de estas dos:

$$A = \begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}, \qquad ó \qquad B = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cual de las dos es la que buscamos teniendo en cuenta que nuestra dicha de giro T ha de cumplir:

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{25} \\ \frac{117}{25} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así la transformación ortogonal pedida viene dada por las ecuaciones:

$$t(x,y) = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24x+7y}{25} \\ \frac{-7x+24y}{25} \end{pmatrix}.$$

VI.– *Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.*

Para que una matriz T asociada a un endomorfismo respecto a una base ortonormal corresponda a una transformación ortogonal ha de cumplir $TT^t = Id$. En nuestro caso:

$$TT^t = \begin{pmatrix} 2a^2+b^2 & 2a^2-b^2 & 0 \\ 2a^2-b^2 & 2a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la identidad obtenemos las eucaciones:

$$2a^2+b^2=1, \quad 2a^2-b^2=0, \quad 2b^2=1.$$

Notamos que la primera es la suma de las otras dos (dependiente) luego queda:

$$a^2 = b^2/2, \quad b^2 = 1/2.$$

De donde $b = \pm\sqrt{1/2}$ y obtenemos cuatro soluciones:

- Caso I): $a = 1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso II): $a = 1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

- Caso III): $a = -1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso IV): $a = -1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

(ii) *Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortgonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.*

Para clasificar la transformación basta saber su traza y su determimante. Tenemos:

$$det(A) = 4ab^2, \quad traza(A) = 2a.$$

Entonces:

- Caso I): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(-1/2,1/2,1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso II): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(-1/2,1/2,-1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso III): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

- Caso IV): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 + z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,-1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

VII.– *En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:*

$$B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) *Probar que f es una transformación ortogonal.*

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C:

$$F_{CC} = M_{CB} F_{BB} M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es un base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot {F_{CC}}^t = Id$.

(b) *Clasificar razonadamente f, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.*

Vemos que:

$$det(F) = -1; \qquad traza(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$ compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$cos(\alpha) = (traza(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1}:

$$S_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x = 0, \, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0,1,0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0,1,0),(1,0,0), f(1,0,0)\} = \{(0,1,0),(1,0,0),(3/5,0,4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0,1,0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.– *Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.*

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raiz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1. Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

(i) $cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

(ii) $cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respecivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

IX.– *En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.*

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el seimieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4, 0, 3)$ y de la segunda $v = (0, 1, 0)$. El ángulo que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\|\|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3, 0, 4)$ ó $(3, 0, -4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v, si tomamos como semieje el generado por $(-3, 0, 4)$ la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$det\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3,0,4),(4,0,3),(0,1,0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5,0,4/5),(4/5,0,3/5),(0,1,0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB}G_BM_{BC} = M_{CB}G_BM_{CB}^{-1} = M_{CB}G_BM_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

X.– *En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica se tiene un endomorfismo de matriz asociada en la base cañonica:*

$$T = \begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los valores de a, b, c para los cuales T es una transformación ortogonal.*

La matriz define una transformación orgogonal si cumple:

$$TT^t = Id$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} a & 3/5 \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ 3/5 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff a^2 + \frac{9}{25} = 1, \qquad ac + \frac{3}{5}b = 0, \qquad c^2 + b^2 = 1.$$

Despejando obtenemos:

$$a = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Y de la segunda ecuación:

$$c = \mp\frac{3}{4}b.$$

Sustituyendo en la tercera:

$$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad b = \pm\frac{4}{5}.$$

Por tanto hay cuatro casos:

Caso I: $a = 4/5$, $b = 4/5$, $c = -3/5$.

Caso II: $a = 4/5$, $b = -4/5$, $c = 3/5$.

Caso III: $a = -4/5$, $b = 4/5$, $c = 3/5$.

Caso IV: $a = -4/5$, $b = -4/5$, $c = -3/5$.

(ii) *Para cada uno de los casos anteriores clasificar la correspondiente transformación ortogonal indicando si procede el ángulo de giro ó el eje de simetría.*

El tipo de transformación depende del determinante de la matriz. Si $|T| = 1$ entonces es un giro; si $|T| = -1$ entonces es una simetría respecto a una recta.

Si es un giro de ánuglo α la matriz asociada respecto a la base canónica necesariamente tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Si es una simetría el eje de simetría es el autovector de T asociadao al 1.

Tenemos que $|T| = ab - \frac{3}{5}c$.

Caso I. $|T| = 1$. Se trata de un giro. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Por tanto $cos(\alpha) = 4/5$ y $sin(\alpha) = -3/5$. El ángulo de giro es $-arcos(4/5)$.

Caso II. $|T| = -1$. Es una simetría. El eje de simetría está generado por el autovector de T asociado al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + 3y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(3, 1)\}.$$

Caso III. $|T| = -1$. Es una simetría. El eje de simetría está generado por el autovector de T asociado al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -9x + 3y = 0 \iff (x, y) \in \mathcal{L}\{(1, 3)\}.$$

Caso IV. $|T| = 1$. Se trata de un giro. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

Por tanto $cos(\alpha) = -4/5$ y $sin(\alpha) = -3/5$. El ángulo de giro es $-arcos(-4/5)$.

XI.– *En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.*

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como $\bar{u}$ forma un ángulo α con $\bar{v}$, las coordenadas de $\bar{u}$ son $(cos(\alpha), sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a $\bar{u}$ que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-sin(\alpha), cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} = (cos(\alpha), sin(\alpha), 0), (-sin(\alpha), cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Tiene la misma orientación que B. La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector $\bar{e}_3$ ortogonal al espacio generado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.*

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $Traza = 3$ si la aplicación es la identidad.

- $Traza = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.

- $Traza = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.

- $Traza = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.

- $-1 < traza = 1+2cos(A) < 3$ y $traza \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.

- $-3 < traza = -1 + 2cos(A) < 1$ y $traza \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $traza(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2cos(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad cos(A) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi/3.$$

XIII.– *Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:*

Recordemos en primer lugar, que la traza de una matriz de una aplicación lineal no depende de la base en la que se trabaje, ya que se conserva por semejanza.

(i) *¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en* $\mathbb{R}^3$*?.*

Sabemos que en una base adecuacada la matriz asociada a una transformación orotogonal es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{si es un giro}$$

y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{si es un giro compuesto con simetría}$$

En el primer caso la traza es $1 + 2cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $1 + 2 = 3$.

En el segundo caso la traza es $-1 + 2cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $-1 + 2 = 1$.

Por tanto el valor máximo de la traza es 3.

(ii) *¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en* $\mathbb{R}^3$*?.*

Si la transformación es inversa es un giro compuesto con simetría. Según hemos visto en el apartado anterior el valor máximo de su traza es 1.

(iii) *Si la matriz asociada a un giro en* $\mathbb{R}^3$ *tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?.*

Según hemos visto en (i) la traza de una matriz de giro es $1 + 2cos(\alpha)$. Si es nula se deduce que $cos(\alpha) = -1/2$ y por tanto el ángulo es $arccos(-1/2) = \pm 120^o$.

(iv) *Si f es una simetría del plano con el producto escalar usual y $f(1,2) = (-1,-2)$. ¿Cuál es el eje de simetría?.*

Vemos que $f(1,2) = -(1,2)$. Por tanto $(1,2)$ es perpendicular al eje de simetría y es el vector normal del eje de giro. Este será entonces: $x + 2y = 0$.

XIV.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si T es la matriz asociada a un giro en $\mathbb{R}^3$ entonces $traza(T) \geq -1$.*

VERDADERO. Sabemos que la traza de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base porque la traza se conserva por semejanza. Entonces en una base adecuada sabemos que la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$traza(T) = traza(T_B) = 1 + 2cos(\alpha) \leq 1 + 2(-1) = -1.$$

(ii) *La composición de dos simetrías respecto a una recta en el plano es una nueva simetría respecto a una recta.*

FALSO. Una simetría respecto a una recta en el plano es una transformación inversa; la composición de dos tranformaciones inversas es una directa, es decir, un giro.

De hecho, como contraejemplo trivial basta considerar la composición de una simetría respecto a una recta consigo misma. Es claramente la identidad que NO es una nueva simetría respecto a una recta.

(iii) *Si dos bases tienen la misma orientación entonces el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es* 1.

FALSO. Dos bases tiene la misma orientación si el determinante de la matriz de cambio de base entre ellas es positivo, pero NO necesariamente uno. Por ejemplo $C = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B = \{(1,0),(0,2)\}$ tienen la misma orientación pero $det(M_{CB}) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 1$.

(iv) *Si T es una transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ y 1 es autovalor de T entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.*

VERDADERO. Si T es una transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro. Tiene un autovector asociado al -1 que es el precisamente el eje de giro. Si tiene un autovector $\vec{v}$ asociado al 1 ha de ser perpendicular al eje de giro (porque en transformaciones ortogonales autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales). Entonces sobre ese vector $\vec{v}$ actúa el giro; pero si esta asociado al 1 cumple que $t(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ y por tanto el giro es de cero grados.

En resumen la transformación inversa en $\mathbb{R}^3$ es un giro de **ángulo CERO** compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro, luego es simplemente una simetría respecto a un plano.

(1 punto)

XV.– *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1,2,-2)$ y $\bar{u}_2 = (1,1,0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1,0,-1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U.*

Para calcular el simétrico del subespacio V basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

Método I: Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio U. Para ello necesitamos una base de U (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores ortogonales:

$$(x,y,z) \cdot (1,2,-2) = 0 \iff x + 2y - 2z = 0$$
$$(x,y,z) \cdot (1,1,0) = 0 \iff x + y = 0$$

Por tanto un vector $\bar{u}_3$ ortogonal a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es:

$$\bar{u}_3 = (2,-2,-1)$$

Ahora en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera V es:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de V es el subespacio generado por el vector $(-1, 4, -1)$.

Método II: Calculamos primero la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre U. Será un vector $\bar{w} \in U$ verificando que $\bar{w} - \bar{v}$ es ortogonal a U. Sea $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$. Basta imponer que $\bar{w} - \bar{v}$ sea ortogonal a los vectores que generan U:

$$\left.\begin{array}{l} a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 = \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = \bar{v} \cdot \bar{u}_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 9a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto $w = (1/3, 2/3, -2/3)$. Ahora el simétrico de $\bar{v}$ se construye sumando al vector $\bar{w}$ el vector $\bar{w} - \bar{v}$. Queda:

$$2\bar{w} - \bar{v} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) - (1, 0, -1) = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.