ÁLGEBRA LINEAL II — Ejercicios Tema III. Capítulos 1 y 2

Geometría afín. (Curso 2023–2024)

1.– En el plano afín $\mathbb{R}^2$ se consideran la referencia canónica $R = \{(0,0);(1,0),(0,1)\}$ y otra referencia $R' = \{(1,2);(2,3),(3,4)\}$.

(a) Si un punto P tiene coordenadas $(1,-2)_{R'}$ en la referencia R' calcular sus coordenadas en la referencia R.

(b) Si un punto Q tiene coordenadas $(2,3)_R$ en la referencia canónica calcular sus coordenadas en la referencia R'.

2.–

(a) En el plano afín $\mathbb{R}^2$ y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua y cartesiana de una recta que pasa por el punto $(2,1)$ y tiene por vector director $(1,3)$.

(b) En el plano afín $\mathbb{R}^2$ y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua y cartesiana de una recta que que tiene por ecuación $2x+3y-5=0$.

3.–

(a) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua y cartesianas de una recta que pasa por el punto $(2,0,-1)$ y tiene por vector director $(1,3,2)$.

(b) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua y cartesianas de una recta que que tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y-2z+1&=0\\ 2x-y-z+2&=0 \end{aligned}$$

4.–

(a) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones vectorial, paramétrica y cartesiana de un plano que pasa por el punto $(1,0,1)$ y tiene por vectores directores $(1,0,2)$ y $(1,1,0)$.

(b) En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones vectorial, paramétrica y cartesianas de un plano que tiene por ecuación $x+2y-z-2=0$.

5.– En el plano afín euclideo $\mathbb{R}^2$ y con respecto a una referencia rectangular se consideran las rectas:

$$r \equiv x+2y-4=0 \qquad s \equiv x+y-3=0$$

(a) Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.

(b) Hallar las distancia del punto $(1,3)$ a la recta r.

6.– En el espacio afín euclideo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una referencia rectangular se consideran las variedades afines:

$$\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0, \qquad r \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 0), \qquad s \equiv (x, y, z) = (0, 1, 1) + s(1, 1, 2)$$

(a) Hallar el ángulo que forman π y r.

(b) Hallar la distancia del punto $(1, 1, 0)$ al plano π.

(c) Hallar la distancia entre las rectas r y s.

7.– En el plano afín euclideo $\mathbb{R}^2$, en las condiciones usuales y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones de:

(a) una traslación respecto al vector $\vec{u} = (2, 3)$.

(b) una homotecia de centro $(1, 2)$ y razón 4.

(c) un giro de centro $(1, -2)$ y ángulo 30 grados.

(d) una simetría respecto a la recta $x + y = 1$.

8.– En el plano afín euclideo $\mathbb{R}^3$, en las condiciones usuales y con respecto a la referencia canónica calcular las ecuaciones de:

(a) una traslación respecto al vector $\vec{u} = (1, 0, 2)$.

(b) una homotecia de centro $(1, 2, -1)$ y razón -2.

(c) un giro de semieje la semirecta $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0)$, $t > 0$ y ángulo 45 grados.

(d) una simetría respecto al plano $x + y - z = 1$.

Soluciones.

---

1. (a) $(-3, -3)$. (b) $(-1, 1)$.

2.

(a) Vectorial: $(x, y) = (2, 1) + t(1, 3)$. Paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{3}$. Cartesiana: $3x - y - 5 = 0$.

(b) Vectorial: $(x, y) = (1, 1) + t(3, -2)$. Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2}$. Cartesiana: $2x + 3y - 5 = 0$.

3.

(a) Vectorial: $(x, y, z) = (2, 0, -1) + t(1, 3, 2)$. Paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$.
Cartesianas: $3x - y - 6 = 0$, $2y - 3z - 3 = 0$.

(b) Vectorial: $(x, y, z) = (-1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$. Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.
Cartesianas: $x + y - 2z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$.

4.

(a) Vectorial: $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, 0, 2) + s(1, 1, 0)$. Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = s \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ Cartesiana: $2x - 2y - z - 1 = 0$.

(b) Vectorial: $(x, y, z) = (2, 0, 0) + t(1, 0, 1) + s(2, -1, 0)$. Paramétrica: $\begin{cases} x = 2 + t + 2s \\ y = -s \\ z = t \end{cases}$ Cartesiana: $x + 2y - z - 2 = 0$.

5. (a) $arccos(3/\sqrt{10})$. (b) $3/\sqrt{5}$

6. (a) $arcsin(1/\sqrt{6})$. (b) $3/\sqrt{6}$. (c) 0 (las rectas se cortan en el punto $(1, 2, 3)$)

7.

(a) $f(x, y) = (x + 2, y + 3)$

(b) $f(x, y) = (4x - 3, 4y - 6)$.

(c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 2 \end{pmatrix}$.

(d) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$.

8.

(a) $f(x, y, z) = (x + 1, y, z + 2)$

(b) $f(x, y) = (3 - 2x, 6 - 2y, -3 - 2z)$.

(c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(d) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.