ÁLGEBRA LINEAL II — Ejercicios Tema II. Capítulos 1 y 2

Introducción a los espacios euclídeos. Ortogonalidad. (Curso 2023–2024)

1.– Comprobar cuáles de las siguientes forma bilineales son productos escalares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y),(x',y')) = xx' + 3xy' - yx' + 2yy'$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + xy' + xz' + yx' + 2yy' + 3yz' + zx' + 3zy' + 9zz'$

(d) $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

2.– Para el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1, calcular:

(a) La matriz de Gram del producto escalar.

(b) $(1,0,1) \cdot (1,1,1)$.

(c) $\|(1,0,1)\|$.

(d) El ángulo que forman los vectores $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$.

3.– Para el producto escalar del apartado (d) del ejercicio 1, calcular:

(a) La matriz de Gram del producto escalar.

(b) $< 1 - x, x - x^2 >$.

(c) $\|1 - x\|$.

(d) El ángulo que forman los vectores (polinomios) $1 - x$ y $x - x^2$.

4.– Para el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1:

(a) Comprobar si los vectores $(1,0,0)$ y $(2,-1,-1)$ son ortogonales.

(b) Calcular una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal.

(c) Calcular una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal.

5.– Con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ y usando el método de Gram-Schmidt, calcular una base ortogonal y otra ortonormal del subespacio:

$$U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,1)\}$$

6.– Con el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1 y usando el método de Gram-Schmidt, calcular una base ortogonal y otra ortonormal del subespacio:

$$U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,1)\}$$

7.– Con el producto escalar usual calcular la proyección del vector $(2,1,0)$ sobre el subespacio vectorial $U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,1)\}$

8.– Con el producto escalar usual calcular la matriz asociada en la base canónica a la aplicación proyección sobre el subespacio $U = \mathcal{L}\{(1,0,1),(1,1,1)\}$

9.– Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcular los autovalores de A.

(b) Calcular los autovectores de A.

(c) Calcular una base ortonormal de autovectores de A.

(d) Calcular una matriz P ortogonal, es decir, cumpliendo $P^t = P^{-1}$ tal que $D = P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

Soluciones.

---

1. (a) No (no es simétrico). (b) No (no es simétrico). (c) Si. (d) Si.

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. (b) 16. (c) $2\sqrt{3}$. (d) $arcos\dfrac{4\sqrt{66}}{33}$.

3. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$. (b) $\dfrac{1}{12}$. (c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (d) $arcos\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

4. (a) Si. (b) $\{(1,0,0),(-1,1,0),(1,-2,1)\}$. (c) $\{(1,0,0),(-1,1,0),(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})\}$.

5. Base ortogonal: $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$. Base ortonormal: $\{(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}),(0,1,0)\}$.

6. Base ortogonal: $\{(1,0,1),(-\frac{1}{3},1,-\frac{1}{3})\}$. Base ortonormal: $\{(\frac{\sqrt{3}}{6},0,\frac{\sqrt{3}}{6}),(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{6})\}$.

7. $(1,1,1)$.

8. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

9. (a) $\lambda_1 = 2, \quad m.a. = 2, \qquad \lambda_2 = -2, \quad m.a. = 1.$

(b) $S_2 = \mathcal{L}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$, $S_{-2} = \mathcal{L}\{(1,-1,0)\}$.

(c) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,0,1),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)\}$.

(d) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.