ÁLGEBRA LINEAL II — Ejercicios Tema I, Capítulo 1

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas (Curso 2025–2026)

1.– Calcula la matriz asociada respecto de la base canónica de las siguientes formas bilineales:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y),(x',y')) = xx' + 3xy' - yx' + 2yy'$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2xz' - 4yy' + 2zx' + 8zz'$

2.–

(a) Si $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal de matriz asociada en la base canónica $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular $f((1,1),(3,2))$.

(b) Si $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal de matriz asociada $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

3.– Sea C la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B = \{(3,2),(1,1)\}$,

(a) si $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a una forma bilineal en la base C hallar la matriz asociada F_B en la base B.

(b) si $F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a una forma bilineal en la base B hallar la matriz asociada F_C en la base C.

4.– Indica si las formas bilineales del ejercicio 1 son simétricas, antisimétricas o ninguna de las dos cosas.

5.– Calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de las siguientes formas cuadráticas:

(a) $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2$.

(b) $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z) = x^2 - 4xz + y^2 - 2yz - z^2$.

(c) $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 4yz + 10z^2$.

6.– Para la forma cuadrática del apartado (a) del ejercicio 5:

(a) Comprobar si las siguientes parejas de vectores son o no conjugadas:

$$(0,1) \text{ y } (1,0), \qquad (1,0) \text{ y } (2,1), \qquad (1,-1) \text{ y } (1,1), \qquad (0,1) \text{ y } (0,1)$$

(b) Comprobar si alguno de los siguientes vectores es autoconjugado:

$$(1,2), \qquad (1,1), \qquad (2,1).$$

7.– Hallar las ecuaciones implícitas del núcleo de las formas cuadráticas del ejercicio 5.

8.– Hallar el rango de las formas cuadráticas del ejercicio 5.

9.– Hallar la signatura y clasificar las formas cuadráticas del ejericio 5, indicando si son degeneradas o no degeneradas y si son definidas (positivas o negativas), semidefinidas (positivas o negativas) o indefinidas.

Soluciones.

---

1. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

2. (a) 10. (b) 14.

3. (a) $F_B = \begin{pmatrix} 25 & 11 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$. (b) $F_C = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -14 & 19 \end{pmatrix}$.

4. (a) Ninguna de las dos cosas. (b) Antisimétrica. (c) Simétrica.

5. (a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

6. (a) No. Si. No. No. (b) No. No. Si.

7. (a) $x - 2y = 0$. (b) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. (c) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. .

8. (a) 1. (b) 3. (c) 3.

9.

(a) $signatura = (1, 0)$, degenerada y semidefinida positiva.

(b) $signatura = (2, 1)$, no degenerada e indefinida.

(c) $signatura = (3, 0)$, no degenerada y definida positiva.