Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **16 de Mayo de 2023**

1.– *Dado $a \in \mathbb{R}$, se define la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $w(x,y) = x^2 + 2axy + y^2$.*

(i) *Clasificar w en función de a indicando además su rango y signatura.*

Para clasificarla diagonalizamos por congruencia la matriz asociada en la base canónica. Los signos que se obtienen en la diagonal (la signatura) determinarán el tipo de forma cuadrática. La matriz asociada en la base canónica se obtiene trasladando los coeficientes adecuadamente:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-a)\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

La signatura depende de lo signos de la diagonal. Para estudiar como varían los signos vemos para que valores de a son 0, que corresponderán a posibles límites de cambio de signo:

$$1 - a^2 = 0 \quad \iff \quad a = \pm 1$$

Entonces tenemos:

a	Signatura	Rango	Tipo
$a < -1$	$(1,1)$	2	NO degenerada e indefinida
$a = 1$	$(1,0)$	1	degenerada y semidefinida positiva
$-1 < a < 1$	$(2,0)$	2	NO degenerada y definida positiva
$a = 1$	$(1,0)$	1	degenerada y semidefinida positiva
$a > 1$	$(1,1)$	2	NO degenerada e indefinida

(ii) *Para $a = 2$ dar una base de vectores conjugados.*

Una base B de vectores conjugados equivale a una base en la cual la matriz asociada F_B es diagonal. El cambio de base equivale a hacer congruencia sobre la matriz inicial. Como ya hemos diagonalizado en el apartado anterior, basta calcular la matriz de paso de la congruencia que equivale a la matriz de cambio de base:

$$Id \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

La base pedida es $B = \{(1,0), (-2,1)\}$.

(iii) *Para $a = 0$ y $a = 1$ hallar los vectores autoconjugados.*

Para $a = 0$ vimos que la forma cuadrática es definida positiva. En ese caso sabemos que los vectores autconjugados son únicamente el vector cero: $autoconj(w) = \{(0,0)\}$.

Para $a = 1$ vimos que la forma cuadrática es semidefinida positiva. En ese caso sabemos que los vectores autconjugados coinciden con el núcleo:

$$ker(w) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, F_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Nos queda el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad x + y = 0.$$

De donde:

$$autoconj(w) = ker(w) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\} = \mathcal{L}\{(1,-1)\}.$$

(iv) *¿Para qué valores de a existe una base B en la cual la matriz asociada a f es $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?.*

Hacer un cambio de base de la matriz asociada a una forma cuadrática equivale a hacer congruencia. Por tanto dos matrices corresponden a la misma forma cuadrática en distintas bases si y sólo si son congruentes. Es decir, si y sólo si tienen la misma signatura. Diagonalizamos la matriz dada:

$$F_B \overset{H_{12}(1)\mu_{12}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1/2)\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(1,1)$; por lo visto en el primer apartado coincide con la de f cuando $a < -1$ o $a > 1$.

(v) *Si f es la forma bilineal asociada a w hallar $f((1,2),(2,3))$ para $a = -1$.*

Dado que la matriz asociada a la forma bilineal es la misma que a la correspondiente forma cuadrática:

$$f((1,2),(2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{F_C} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

(1.1 puntos)

2.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma bilineal simétrica cuya matriz asociada en la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) *Demostrar que f es un producto escalar.*

Un producto escalar es una forma bilineal simétrica definida positiva. En el enunciado ya partimos de una forma bilineal simétrica así que sólo tenemos que comprobar que es definida positiva. Lo hacemos por el Criterio de Sylvester:

$$det\,(\,1\,) = 1 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0, \quad det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

(ii) *Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$. Respecto al producto escalar definido por f:*

(ii.a) *Hallar una base ortogonal de U por el método de Gram Schdmit.*

Primero hallamos una base cualquiera del subespacio pasando de implícita a paramétricas:

$$x+y+z=0 \quad \iff \quad z = -x-y \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -a-b \end{cases}$$

de donde $U = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.

Entonces por Gram Schmidt, el primer vector lo dejamos igual $v_1 = (1,0,-1)$. El segundo es de la forma:

$$v_2 = (0,1,-1) + k(1,0,-1) \text{ cumpliendo } v_1 \cdot v_2 = 0.$$

de donde:

$$k = -\frac{(1,0,-1)\cdot(0,1,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)} = -\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = -\frac{5}{6}$$

y

$$v_2 = (0,1,-1) - \frac{5}{6}(1,0,-1) = \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

La base ortogonal queda:

$$\left\{(1,0,-1), \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

(ii.b) *Calcular las ecuaciones paramétricas de* $U^{\perp}$*.*

El espacio ortogonal $U^{\perp}$ está generado por los vectores perpendiculares a los generadores de U:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)\cdot(1,0,-1) = 0, \quad (x,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0\}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 5z = 0$$
$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - 4z = 0$$

Resolviendo:

$$x = 5z, \qquad y = 4z - x = -z$$

de donde

$$x = 5\lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = \lambda$$

(iii.c) *Hallar la proyección ortogonal del vector* $(1,1,1)$ *sobre* U*.*

La proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre U es un vector $u \in U$ tal que $(1,1,1) - u \in U^{\perp}$. Entonces:

$$u = a(1,0,-1) + b(0,1,-1) = (a, b, -a-b)$$

y

$$(1,1,1) - u = (1-a, 1-b, 1+a+b)$$

Imponemos que cumpla las ecuaciones de $U^{\perp}$ halladas en el apartado anterior:

$$(1-a) - 5(1+a+b) = 0$$
$$1 - a + 1 - b - 4 - 4a - 4b = 0$$

Resolviendo se obtiene $a = -2$ y $b = 8/5$ y así:

$$u = (-2, 8/5, 2/5).$$

(1.3 puntos)

3.– *Sea el espacio euclideo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar usual y* $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si* $det(T_C) = 1$ *entonces* t *es un giro.*

FALSO. Podría no ser tan siquiera una transformación ortogonal. Por ejemplo si

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $|T_C| = 1$, pero no es un giro porque no es una transformación ortogonal ya que $T_C \cdot T_C^t \neq Id$.

(ii) *Si $traza(T_C) = 4$ entonces t no es una transformación ortogonal.*

VERDADERO. Una transformación ortogonal en el espacio es un giro o un giro compuesto con simetría. En el primer caso la traza de la matriz asociada en cualquier base es $1 + 2cos(\alpha) \leq 3$ y en el segundo caso $-1 + 2cos(\alpha) \leq 1$. En ningún caso puede valer 4.

(iii) *Si t es una transformación ortogonal y 1 es autovalor de t, entonces t es un giro.*

FALSO. Por ejemplo si t es una simetría respecto a un plano no es un giro, y sin embargo todos los vectores del plano de simetría son autovectores asociados al autovalor 1 porque quedan fijos por la simetría.

(iv) *Si t es una transformación ortogonal entonces la composición $t \circ t$ es un giro.*

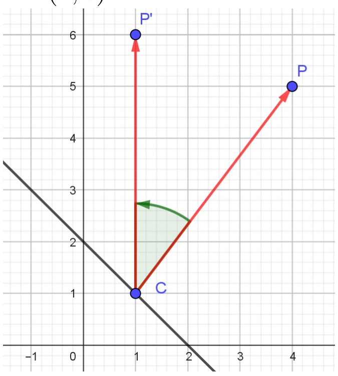
VERDADERO. La composición de transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal. Una transformación ortgonal en el espacio o bien es un giro (si su matriz asociada tiene determinante 1) o bien un giro compuesto con simetría (si su matriz asociada tiene determinante -1). Si T es la matriz asociada a t, entonces $T^2 = T \cdot T$ es la matriz asociada a $t \circ t$ y:

$$det(T^2) = det(T)^2 = (\pm 1)^2 = 1.$$

y por tanto la composición es un giro.

(1.2 puntos)

4.– *En el plano afín $\mathbb{R}^2$ calcular las ecuaciones de un giro con centro en un punto de la recta $x + y - 2 = 0$ y que lleve el punto $(4, 5)$ en el punto $(1, 6)$.*



Dado que un giro conserva las distancias y el centro permanece fijo al girar, el punto $P = (4, 5)$ y su transformado $P' = (1, 6)$ han de equidistar del centro.

Además por pertenecer a la recta $x + y - 2 = 0$ sus coordenadas son de la forma $(a, 2 - a)$. Imponemos que equidiste de $(4, 5)$ y $(1, 6)$:

$$\sqrt{(a-4)^2 + (-3-a)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (-4-a)^2}$$

Elevando al cuadrado, simplificando y resolviendo se obtiene $a = 1$ y el centro es el punto $C = (1, 1)$.

Ahora las ecuaciones de giro son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

donde T es la matriz de giro de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A) \\ sin(A) & cos(A) \end{pmatrix}.$$

Dado que lleva el vector $\vec{CP} = P - C = (3,4)$ en el vector $\vec{CQ} = (0,5)$:

$$\begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A) \\ sin(A) & cos(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$3cos(A) - 4sin(A) = 0, \quad 3sin(A) + 4cos(A)) = 5$$

Resolviendo:

$$cos(A) = 4/5, \qquad sin(A) = 3/5$$

y las ecuaciones de giro quedan:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

5.– *En el espacio afín euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *se consideran las rectas de ecuaciones:*

$$r \equiv (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda(1,0,0), \quad s \equiv \begin{cases} z = 2 \\ x = 0 \end{cases}, \quad t \equiv (x,y,z) = (0,0,3) + \mu(1,1,0)$$

(i) *Para cada punto* $P = (\lambda, 0, 1) \in r$ *hallar las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por* P *y corta a* s *y* t.

Dado el punto $P \in r$, la recta por P que corta a s y t se puede obtener intersecando los planos que pasan por P y contienen respectivamente a s y a t.

La recta s, pasando de implícitas a paramétricas, tiene por ecuación $(x,y,z) = (0,0,2) + \delta(0,1,0)$.

Entonces el plano por P y que corta a s, es la recta por los puntos $P = (\lambda, 0, 1)$, $(0,0,2)$ y vector director $(0,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ \lambda-0 & 0-0 & 1-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x + \lambda z - 2\lambda = 0.$$

Y el plano por P y que corta a t, es la recta por los puntos $P = (\lambda, 0, 1)$, $(0,0,3)$ y vector director $(1,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-3 \\ \lambda-0 & 0-0 & 1-3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x - 2y + \lambda z - 3\lambda = 0.$$

Entonces las ecuaciones impícitas de la recta que pasa por P y corta a r y s son:

$$\begin{aligned} x + \lambda z - 2\lambda = 0 \\ 2x - 2y + \lambda z - 3\lambda \end{aligned}$$

(ii) *Probar que todas las rectas obtenidas en el apartado anterior son paralelas a un mismo plano.*

Cualquier combinación lineal de los dos planos que definen a cada recta también la contiene. Si restamos las dos ecuaciones queda:

$$-x + 2y + \lambda = 0$$

que es un plano conteniendo a la recta que pasa por $P = (\lambda, 0, 1)$ que corta a s y t. Y tal plano es paralelo a:

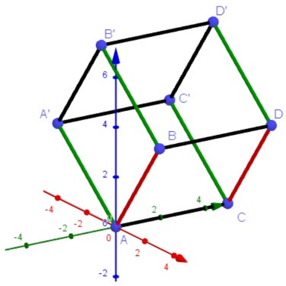
$$-x + 2y = 0 \iff x - 2y = 0.$$

Por tanto todas las rectas obtenidas en el apartado anterior son paralelas al plano $x - 2y = 0$.

(1 punto)

6.– *En el espacio afín euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *se consideran los puntos* $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,4)$, $C = (0,5,0)$:

(i) *Si* A, B, C *son tres vértices en una misma cara de un cubo, hallar las coordenadas de los cinco vértices restantes ¿Es única la solución?.*



Tenemos que:

$$d(A,B) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$
$$d(A,B) = \sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2 + (0-0)^2} = 5$$
$$d(B,C) = \sqrt{(3-0)^2 + (0-5)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$$

Por tanto los dos lados del cuadrado son los segmentos iguales AB y AC. Se tiene entonces que si llamamos D al cuarto vértice de la base $\vec{AB} = \vec{CD}$ y por tanto:

$$B - A = D - C \quad \Rightarrow \quad D = C + B - A = (0,5,0) + (3,0,4) - (0,0,0) = (3,5,4)$$

Si llamamos A', B', C', D' a los vértices de la cara opuesta del cubo, todos ellos se obtienen sumando a los de la cara conocida un vector perpendicular a ésta y de la misma longitud que el lado del cuadrado (que hemos visto que es 5 unidades). Para hallar un vector normal al plano que contiene a la cara $ABCD$ usamos el producto vectorial:

$$\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (3,0,4) \times (0,5,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20\vec{e}_1 + 15\vec{e}_3 = (-20,0,15)$$

Para conseguir que sea de la longitud deseada, lo dividimos por su norma y lo multiplicamos por el lado del cubo:

$$\vec{v} = 5 \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = 5 \cdot \frac{(-20,0,15)}{\sqrt{(-20)^2 + 0^2 + 15^2}} = (-4,0,3).$$

En definitiva los restantes vértices tiene por coordenadas:

$$A' = A + \vec{v} = (0,0,0) + (-4,0,3) = (-4,0,3)$$
$$B' = B + \vec{v} = (3,0,4) + (-4,0,3) = (-1,0,7)$$
$$C' = C + \vec{v} = (0,5,0) + (-4,0,3) = (-4,5,3)$$
$$D' = D + \vec{v} = (3,5,4) + (-4,0,3) = (-1,5,7)$$

La solucińn no es única porque podríamos haber orientado el vector perpendicular a la cara conocida hacia el lado opuesto tomando $\vec{v} = -(-4,0,3) = (4,0,-3)$.

(ii) *Hallar el volumen de la pirámide triangular con base el triángulo* ABC *y vértice el punto* $(1,1,1)$.

El volumen es:

$$V = \frac{\text{área base} \cdot \text{altura}}{3}.$$

El área de la base es la mitras del área de una cara del cubo: $5^2/2 = 25/2$.

La altura es la distancia del vértice $(1,1,1)$ al plano ABC. Es el plano que tiene por vector normal el $\vec{v} = (-4,0,3)$ y pasa por $A = (0,0,0)$:

$$-4x + 3z = 0 \iff 4x - 3z = 0.$$

Entonces usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano vemos que la altura es:

$$h = d(4x - 3z = 0, (1,1,1)) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 1|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{5}.$$

El volumen queda:

$$V = \frac{\text{área base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{(25/2)(1/5)}{3} = \frac{5}{6}.$$

(1.2 puntos)

7.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0$$

(i) *Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida canónica.*

Clasificamos la cónica en función del determinante de la matriz asociada A y la de términos cuadráticos T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$det(A) = -9, \qquad det(T) = 0.$$

Se trata de una parábola.

La ecuación reducida es de la forma $\lambda x'^2 - 2dy' = 0$, donde λ es el autovalor no nulo de T y $d = \sqrt{-|A|/\lambda}$. Dado que la suma de los autovalores de T es su traza y por ser una parábola uno de los autovalores es cero, se tiene que:

$$\lambda + 0 = traza(T) = 5, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 5.$$

y

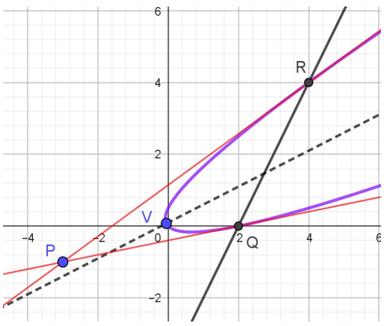
$$d = \sqrt{9/5} = 3\sqrt{5}/5.$$

La ecuación reducida queda:

$$5x'^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} y' = 0$$

y la reducida canónica:

$$x'^2 = 2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{25} y'$$



(ii) *Hallar el centro, sus asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.*

Como es una parábola no tiene centro ni asínotas y la excentricidad es 1.

El único eje es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo. Calculamos el autovector:

$$(T - 5Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x - y = 0.$$

Tomamos un vector verificando la ecuación, por ejemplo: $(1, -2)$.

El eje queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 5x - 10y + 1 = 0.$$

El vértice se obtiene intersecando el eje con la cónica:

$$\begin{aligned} &5x - 10y + 1 = 0 \\ &x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $x = 2y - 1/5$. Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} &4y^2 + 1/25 - 4y/5 - 8y^2 + 4y/5 + 4y^2 - 4y + 2/5 - 2y = 0 \\ &-6y + 11/25 = 0 \\ &y = 11/150 \end{aligned}$$

y entonces $x = 2y - 1/5 = 22/150 - 1/5 = -8/150 = -4/75$.

El vértice queda $V = (-4/75, 11/150)$.

(iii) *Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto* $(-3, -1)$.

Primero comprobamos si el punto pertenece a la cónica, viendo si satisface o no su ecuación:

$$(-3)^2 - 4(-3)(-1) + 4(-1)^2 - 2(-3) - 2(-1) = 9 \neq 0$$

No pertenece a la cónica. Entonces calcularemos la recta polar por $(-3, -1)$. La intersección de ésta con la cónica nos dará los puntos de tangencia y finalmente las tangentes en tales puntos son las rectas pedidas.

La recta polar es:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -2x + y + 4 = 0 \iff 2x - y - 4 = 0$$

La intersecamos con la cónica:

$$\begin{aligned} &2x - y - 4 = 0 \\ &x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $y = 2x - 4$. Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} &x^2 - 8x^2 + 16x + 16x^2 - 64x + 64 - 2x - 4x + 8 = 0 \\ &9x^2 - 54x + 72 = 0 \\ &x^2 - 6x + 8 = 0 \end{aligned}$$

Queda:

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 8} = 3 \pm 1 = 2 \text{ ó } 4$$

Los puntos de corte son por tanto $Q = (2, 0)$ y $(4, 4)$. Finalmente calculamos la tangente en cada uno de ellos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 5y - 2 = 0$$

y

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -5x + 7 - 8 = 0 \iff 5x - 7 + 8 = 0$$

(1.3 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto* $(1,1)$*, es tangente a la recta* $x+y-3=0$ *en* $(1,2)$ *y tiene una asíntota paralela al eje* OX*.*

Dado que la cónica es simétrica respecto del centro haremos lo siguiente:

1- Hallamos el punto P' simétrico de $P=(1,2)$ respecto del centro.

2- Hallamos el simétrico de la tangente dada respecto del centro. Será otra tangente a la cónica en el punto P'.

3- Construimos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

4- Imponemos que la cónica tenga por dirección asintótica el vector director del eje OX.

1) El simétrico de $P=(1,2)$ respecto a $C(1,1)$ cumple:

$$C=\frac{P+P'}{2} \quad \Rightarrow \quad P'=2C-P=2(1,1)-(1,2)=(1,0).$$

2) La recta simétrica de $x+y-3=0$ (que pasa por $P=(1,2)$) respecto al centro, es la paralela que pasa por P' (el simétrico de P). Una recta paralela a la dada es de la forma:

$$x+y+d=0$$

Imponemos que pasr por $P'=(1,0)$. $1+0+d=0$ de donde $d=-1$ y la recta queda $x+y-1=0$.

3) El haz de cónicas está generado por el producto de las tangentes y la recta doble que une los puntos de tangencia.

Calculamos la recta que une $P=(1,2)$ y $P'=(1,0)$. Dado que tienen la misma coordenada x es la recta $x-1=0$. El haz queda:

$$(x+y-1)(x+y-3)-\lambda(x-1)^2=0$$

Y desarrollando:

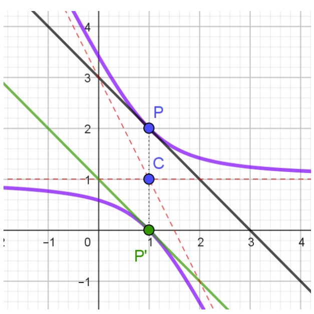
$$(1-\lambda)x^2+2xy+y^2+2(\lambda-2)x-4y+3-\lambda=0$$

4) Imponemos que la cónica tenga por dirección asintótica el vector director del eje OX, es decir, el vector $(1,0)$. Eso significa que:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=0 \iff 1-\lambda=0 \iff \lambda=1.$$

La cónica buscada queda:

$$2xy+y^2-2x-4y+2=0.$$



(1.3 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz - 2x + 2z - 3 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada es:

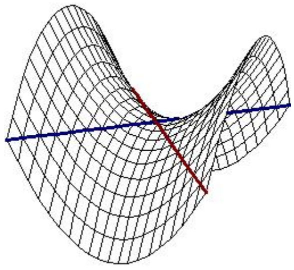
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-2)} \xrightarrow{H_{42}(2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-2)} \xrightarrow{\mu_{42}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

No se puede seguir diagonalizando sin violar las restricciones sobre el uso de la cuarta fila. En ese caso el tipo de cuádrica lo decide la signatura de la matriz T. Los signos son $(+, -, 0)$. Se trata por tanto de un paraboloide hiperbólico.



(0.6 puntos)