Álgebra Lineal II | **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **16 de Mayo de 2023**

1.– Dado $a \in \mathbb{R}$, se define la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $w(x, y) = x^2 + 2axy + y^2$.

(i) Clasificar w en función de a indicando además su rango y signatura.

(ii) Para $a = 2$ dar una base de vectores conjugados.

(iii) Para $a = 0$ y $a = 1$ hallar los vectores autoconjugados.

(iv) ¿Para qué valores de a existe una base B en la cual la matriz asociada a f es $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?.

(v) Si f es la forma bilineal asociada a w hallar $f((1, 2), (2, 3))$ para $a = -1$.

(1.1 puntos)

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma bilineal simétrica f cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f es un producto escalar.

(ii) Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Respecto al producto escalar definido por f, :

(ii.a) Hallar una base ortogonal de U por el método de Gram-Schmidt.

(ii.b) Calcular las ecuaciones paramétricas de $U^{\perp}$.

(iii.c) Hallar la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 1)$ sobre U.

(1.3 puntos)

3.– Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si $det(T_C) = 1$ entonces t es un giro.

(ii) Si $traza(T_C) = 4$ entonces t no es una transformación ortogonal.

(iii) Si t es una transformación ortogonal y 1 es autovalor de t, entonces t es un giro.

(iv) Si t es una transformación ortogonal entonces la composición $t \circ t$ es un giro.

(1.2 puntos)

4.– En el plano afín $\mathbb{R}^2$ calcular las ecuaciones de un giro con centro en un punto de la recta $x + y - 2 = 0$ y que lleve el punto $(4, 5)$ en el punto $(1, 6)$.

(1 punto)

5.– En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 0), \quad s \equiv \begin{cases} z = 2 \\ x = 0 \end{cases}, \quad t \equiv (x, y, z) = (0, 0, 3) + \mu(1, 1, 0)$$

(i) Para cada punto $P = (\lambda, 0, 1) \in r$ hallar las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por P y corta a s y t.

(ii) Probar que todas las rectas obtenidas en el apartado anterior son paralelas a un mismo plano.

(1 punto)

6.– En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran los puntos $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 0, 4)$, $C = (0, 5, 0)$:

(i) Si A, B, C son tres vértices en una misma cara de un cubo, hallar las coordenadas de los cinco vértices restantes ¿Es única la solución?.

(ii) Hallar el volumen de la pirámide triangular con base el triángulo ABC y vértice el punto $(1, 1, 1)$.

(1.2 puntos)

7.– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0$$

(i) Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida canónica.

(ii) Hallar el centro, sus asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.

(iii) Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-3, -1)$.

(1.3 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1, 1)$, es tangente a la recta $x + y - 3 = 0$ en $(1, 2)$ y tiene una asíntota paralela al eje OX.

(1.3 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz - 2x + 2z - 3 = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II		**Exame Final**
Exercicio único	(3 horas.)	**16 de maio 2023**

1.– Dado $a \in \mathbb{R}$, se define a forma cuadrática $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $w(x, y) = x^2 + 2axy + y^2$.

(i) Clasificar w en función de a indicando ademais o seu rango e a súa signatura.

(ii) Para $a = 2$ dar unha base de vectores conxugados.

(iii) Para $a = 0$ e $a = 1$ atopar os vectores autoconxugados.

(iv) Para qué valores de a existe unha base B na que a matriz asociada a f é $F_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?.

(v) Se f é a forma bilineal asociada a w atopar $f((1, 2), (2, 3))$ para $a = -1$.

(1.1 puntos)

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera a forma bilineal simétrica f de matriz asociada na base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f é un producto escalar.

(ii) Sexa $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Co producto escalar definido por f:

(ii.a) Atopar unha base ortogonal de U polo método de Gram-Schmidt.

(ii.b) Calcular as ecuacións paramétricas de $U^\perp$.

(iii.c) Atopar a proxección ortogonal do vector $(1, 1, 1)$ sobre U.

(1.3 puntos)

3.– Sexa o espazo euclideo $\mathbb{R}^3$ co producto escalar usual e $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ unha aplicación lineal. Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións.

(i) Se $det(T_C) = 1$ entón t é un xiro.

(ii) Se $traza(T_C) = 4$ entón t non é unha transformación ortogonal.

(iii) Se t é unha transformación ortogonal e 1 é autovalor de t, entón t é un xiro.

(iv) Se t é unha transformación ortogonal entón a composición $t \circ t$ é un xiro.

(1.2 puntos)

4.– No plano afín $\mathbb{R}^2$ calcular as ecuacións dun xiro con centro nun punto da recta $x + y - 2 = 0$ e que leve o punto $(4, 5)$ no punto $(1, 6)$.

(1 punto)

5.– No espazo afín euclideo $\mathbb{R}^3$ se consideran as rectas de ecuacións:

$$r \equiv (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda(1,0,0), \quad s \equiv \begin{cases} z = 2 \\ x = 0 \end{cases}, \quad t \equiv (x,y,z) = (0,0,3) + \mu(1,1,0)$$

(i) Para cada punto $P = (\lambda, 0, 1) \in r$ atopar as ecuacións implícitas da recta que pasa por P e corta a s e t.

(ii) Probar que tódalas rectas obtidas no apartado anterior son paralelas a un mesmo plano.

(1 punto)

6.– No espazo afín euclideo $\mathbb{R}^3$ se consideran os puntos $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,4)$, $C = (0,5,0)$:

(i) Se A, B, C son tres vértices nunha mesma cara dun cubo, atopar as coordenadas dos cinco vértices restantes É única a solución?.

(ii) Atopar o volumen da pirámide triangular con base o triángulo ABC e vértice o punto $(1,1,1)$.

(1.2 puntos)

7.– No plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 2y = 0$$

(i) Clasificar a cónica e dar a súa ecuación reducida canónica.

(ii) Atopar o centro, as suás asíntotas, eixos, vértices e excentricidade.

(iii) Calcular as rectas tanxentes á cónica que pasan polo punto $(-3,-1)$.

(1.3 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica sabendo que o seu centro é o punto $(1,1)$, é tanxente á recta $x+y-3=0$ en $(1,2)$ e ten unha asíntota paralela o eixo OX.

(1.3 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz - 2x + 2z - 3 = 0.$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
