Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **3 de Julio de 2023**

1.– *Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se define la aplicación:*

$$f:\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\times\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\qquad f(p(x),q(x))=p(1)q(1)-p'(1)q'(1)$$

(i) *Demostrar que f es una forma bilineal simétrica.*

Primero veamos que es simétrica, es decir, que $f(p(x),q(x))=f(q(x),p(x))$:

$$f(q(x),p(x))=q(1)p(1)-q'(1)'(1)=p(1)q(1)-p'(1)q'(1)=f(p(x),q(x))$$

Por ser simétrica, para tener la bilinealidad basta con comprobar la linealidad en la primera componente. Es decir, probaremos que:

$$f(ap_1(x)+bp_2(x),q(x))=af(p_1(x),q(x))+bf(p_2(x),q(x))$$

para $a,b\in\mathbb{R}$, $p_1(x),p_2(x),q(x)\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}f(ap_1(x)+bp_2(x),q(x))&=(ap_1(1)+bp_2(1))q(1)-(ap_1'(1)+bp_2'(1))q'(1)=\\&=ap_1(1)q(1)+bp_2(1)q(1)-ap_1'(1)q'(1)-bp_2'(1)q'(1)=\\&=a(p_1(1)q(1)-p_1'(1)q'(1))+b(p_2(1)q(1)-p_2'(1)q'(1))=\\&=af(p_1(x),q(x))+bf(p_2(x),q(x)).\end{aligned}$$

(ii) *Clasificar f indicando además su rango y signatura.*

Para clasificarla diagonalizaremos por congruencia su matriz asociada respecto de la base canónica $C=\{1,x\}$. Por definición de matriz asociada de una formaa bilineal respecto de una base:

$$F_C=\begin{pmatrix}f(1,1)&f(1,x)\\f(x,1)&f(x,x)\end{pmatrix}.$$

donde por simetría $f(1,x)=f(x,1)$:

$$\begin{aligned}f(1,1)&=1\cdot1-0\cdot0=1\\f(1,x)&=1\cdot1-0\cdot1=1\\f(x,x)&=1\cdot1-1\cdot1=0\end{aligned}$$

Escribimos y diagonalizamos la matriz F_C:

$$F_C=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango es 2 y la signatura $(1,1)$: es no degenerada e indefinida.

(iii) *Dar un par de polinomios que formen una base de vectores conjugados respecto de f.*

Una base B de vectores conjugados es aquella respecto a la cuál la matriz asociada es diagonal. Como yo diagonalizamos en el apartado anterior, basta aplicar las mismas operaciones columna del proceso de diagonalización sobre la identidad y obtendremos la matriz M_{CB}:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=M_{CB}.$$

Por tanto:

$$B = \{(1,0)_C, (-1,1)_C\} = \{1, x-1\}.$$

(iv) *Calcular el conjunto de vectores autoconjugados. Si puede escribirse como unión de dos subespacios de dimensión 1 dar un generador de cada uno de ellos.*

Dado que la forma bilineal es indefinida y de rango 2 sabemos que los vectores autoconjugados se descomponen como unión de dos hiperplanos (en este caso dos rectas). En concreto:

$$\begin{aligned} autoconj(f) &= \{(a_0,a_1)_C | f((a_0,a_1)_C, (a_0,a_1)_C = 0\} = \{(a_0,a_1)_C | (a_0 \quad a_1) F_C (a_0 \quad a_1)^t = 0\} = \\ &= \{(a_0,a_1)_C | a_0^2 + 2a_0a_1 = 0\} = \{(a_0,a_1)_C | a_0(a_0+2a_1) = 0)\} = \\ &= \{(a_0,a_1)_C | a_0 = 0)\} \cup \{(a_0,a_1)_C | a_0 + 2a_1 = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(0,1)_C\} \cup \mathcal{L}\{(2,-1)_C\} = \mathcal{L}\{x\} \cup \mathcal{L}\{2-x\} \end{aligned}$$

(v) *Hallar $w(1+2x)$ siendo w la forma cuadrática asociada a f.*

Se tiene que:

$$w(1+2x) = f(1+2x, 1+2x) = (1+2\cdot 1)(1+2\cdot 1) - 2\cdot 2 = 9 - 4 = 5.$$

O también:

$$w(1+2x) = w((1,2)_C) = (\,1 \quad 2\,) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{F_C} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5.$$

(1.3 puntos)

2.– *Se considera $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial euclídeo con un producto escalar respecto al cuál la base $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ es ortonormal.*

(i) *Hallar la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.*

En una base ortonormal la matriz de Gram es la identidad, es decir, sabemos que $G_B = Id$. Basta hacer el cambio de base:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC}, \text{ con } M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Sea $U = \mathcal{L}\{(1,0,0)\}$. Hallar las ecuaciones paramétricas de $U^\perp$.*

El subespacio ortogonal a U, $U^\perp$ es:

$$U^\perp = \{(x,y,z) | (x,y,z)\cdot(1,0,0) = 0\}.$$

Donde:

$$0 = (x,y,z)\cdot(1,0,0) = (\,x \quad y \quad z\,)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - y = 0.$$

Pasamos de implícita a paramétricas resolviendo el sistema: $y = 2x$. Las paramétricas quedan:

$$x = a, \qquad y = 2a, \qquad z = b.$$

(iii) *Hallar la proyección ortogonal del vector* $(2,1,0)$ *sobre el subespacio* U.

Sea v la proyección buscada. Por ser un vector de U es múltiplo de su generador, es decir:

$$v = k(1,0,0)$$

Además para que sea la proyección ortogonal de $(2,1,0)$ tiene que cumplirse que:

$$v-(2,1,0)\perp U \quad\Longleftrightarrow\quad (k-2,-1,0)\perp(1,0,0) \quad\Longleftrightarrow\quad (k-2 \quad -1 \quad 0)G_C(1 \quad 0 \quad 0)^t = 0$$

Operando queda la ecuación:

$$2(k-2)+1=0 \iff k=3/2.$$

Y así:

$$v = \frac{3}{2}(1,0,0) = (3/2,0,0).$$

(1.1 puntos)

3.– *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *se considera el endomorfismo* $t:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica:*

$$T_C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Demostrar que es una transformación ortogonal. Clasificarla y describirla geométricamente.

Dado que estamos trabajando con el producto escalar usual, la base canónica es ortonormal. Una endomorfismo es una transformación ortogonal si y sólo si su matriz asociada T respecto a una base ortonormal cumple $TT^t = Id$. En este caso vemos que:

$$T_C T_C^t = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = Id$$

y por tanto efectivamente es una transformación ortogonal.

Para clasificarla comenzamos calculando su determinante:

$$det(T_C) = -4/27 - 4/27 - 4/27 - 8/27 - 8/27 + 1/27 = -27/27 = -1.$$

Se trata entonces de un giro compuesto con una simetría respecto a un plano perpendicular al eje de giro.

El ángulo α de giro cumple:

$$\alpha = \pm arccos((1+traza(T_C))/2) = \pm arcos(1) = 0.$$

Por tanto en realidad no hay giro (o es trivial: de cero grados) y simplemente se trata de una simetría respecto a un plano. El plano de simetría está formado por los vectores que no varían al trasnformarse, es decir, los autovectores asociados al 1:

$$(T_C - 1\cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} -x/3 - y/3 + 2z/3 = 0 \\ -x/3 - y/3 + 2z/3 = 0 \\ 2x/3 + 2/3 - 4z/3 = 0 \end{array}\right.$$

Nos queda una única ecuación independiente:

$$-x/3 - y/3 + 2z/3 = 0 \iff x+y-2z=0.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $x+y-2z=0$.

(1 punto)

4.– *Sea F la matriz asociada a una forma cuadrática w. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si $traza(F) > 0$ entonces w es definida positiva.*

FALSO. Por ejemplo si en $\mathbb{R}^2$, $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la forma cuadrática tiene signatura $(1, 1)$ y es indefinida, a pesar de que su traza $2 + (-1) = 1$ es positiva.

(ii) *Si $traza(F) = 0$ y $det(F) \neq 0$ entonces w es indefinida.*

VERDADERO. Si $det(F) \neq 0$ entonces no puede ser semidefinida, ya que si lo fuese en el rango no podría ser máximo y su determinate sería nulo.

Recordemos además por definición de matriz asociada los valores de la diagonal son:

$$F_{ii} = f(u_i, u_i)$$

donde u_i es el vector i-ésimo de la base respecto a la cual estamos trabajando.

Si fuese definida positiva, entonces para cualquier vector $f(u_i, u_i) > 0$ y por tanto al sumar los elementos de la diagonal daría positivo (nunca cero).

Si fuese definida negativa, entonces para cualquier vector $f(u_i, u_i) < 0$ y por tanto al sumar los elementos de la diagonal daría negativa (nunca cero).

Conclusión: no puede ser ni semidefinida, ni definida y por tanto la única posibilidad es que sea indefinida.

(iii) *Si $det(F) < 0$ entonces w no puede ser definida positiva.*

VERDADERO. Si fuese definida positiva una vez diagonaliza por congruencia tendría todos los elementos de la diagonal positivos y por tanto el determinante de la forma diagonal sería positiva; como la congruencia conserva el signo del determinante entonces también el determinate de la matriz original debería de ser positivo.

También es consecuencia directa del criterio de Sylvester que nos dice que si una matriz es definida positiva todos los determinantes de las submatrices cuadradas de cualquier tamaño son positivos, en particular el de la matriz total.

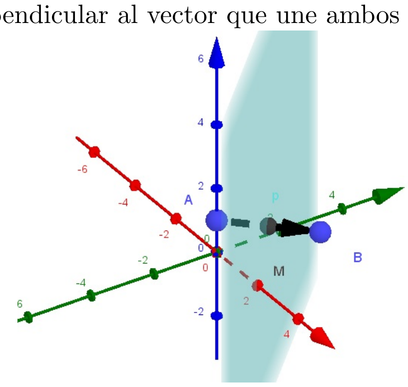
(iv) *Si $det(F) < 0$ entonces w es definida negativa.*

FALSO. En el mismo ejemplo del apartado (i) la matiz tiene determinante negativo, pero es indefinida.

(1.2 puntos)

5.– *En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $(0, 0, 1)$ en el punto $(2, 2, 1)$.*

En una simetría respecto a un plano, el punto medio de un punto y su simétrico yace en en el plano de simetría. Además éste es perpendicular al vector que une ambos puntos.



Por tanto en este caso el plano de simetría pasa por el punto:

$$M = \frac{(0,0,1)+(2,2,1)}{2} = (1,1,1)$$

y tiene por vector normal $(2,2,1)-(0,0,1)=(2,2,0)$. O equivalentemente el vector $(1,1,0)$.

Sabemos que entonces las ecuaciones de la simetría son de la forma:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

donde T es la matriz de la simetría respecto a un plano de vector normal $\vec{n}=(1,1,0)$.

Para hallar T consideramos una base auxiliar B formada por los generadores del plano y el vector normal. Los generadores son un par de vectores independientes ortogonales a $\vec{n}$:

$$(x,y,z)\cdot(1,1,0)=0 \iff x+y=0 \iff y=-x.$$

Tomamos un par de vectores cumpliendo esta ecuación y con el vector normal, la base B:

$$B=\{\underbrace{(1,-1,0),(0,0,1)}_{plano},\underbrace{(1,1,0)}_{plano^{\perp}}\}.$$

En esta base sabemos que:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1} \qquad \text{donde} \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La simetría queda:

$$t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

6.– *En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sean las rectas $r: x+y=1$ y $s: x=3$ y el punto $P=(2,2)$.*

(i) *Hallar la ecuación de una recta t que pase por P de manera que éste sea el punto medio de los puntos de corte de t con las rectas r y s.*

Un punto geńerico $A=(a,b)$ de la recta r cumple $a+b=1$ y por tanto es de la forma $A=(a,1-a)$.

Un punto geńerico $B=(c,d)$ de la recta s cumple $c=3$ y por tanto es de la forma $B=(3,d)$.

Para que $P=(2,2)$ sea el punto medio tiene que cumplirse que:

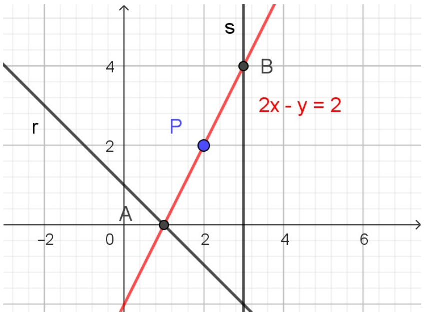
$$P=\frac{A+B}{2} \iff 2P=a+b \iff (4,4)=(a,1-a)+(3,d)$$

de donde:

$$4=a+3, \qquad 4=1-a+d$$

Resolviendo $a=1$ y $d=4$. Por tanto $A=(1,0)$ y $B=(3,4)$ y la recta pedida es la que une ambos puntos:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{4-0} \iff 4x-2y-4=0 \iff 2x-y-2=0.$$



(ii) *Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleve el punto P en el origen y cuadruplique áreas.*

Si k es la razón y cuadriplica áreas significa que $k^2 = 4$. Por tanto $k = \pm 2$ y habrá dos posibles homotecias cumpliendo lo pedido.

Por otra parte si $C = (p, q)$ es el centro de la homotecia, su ecuación es:

$$f(x, y) = (p, q) + k((x, y) - (p, q))$$

Si lleva $P(2, 2)$ en el origen cumple:

$$(0, 0) = (p, q) + k((2, 2) - (p, q)) \iff (2k, 2k) = (k - 1)(p, q) \iff (p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k - 1}.$$

Para $k = 2$ queda:

$$(p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k - 1} = (4, 4)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x, y) = (4, 4) + 2((x, y) - (4, 4)) \iff f(x, y) = (2x - 4, 2y - 4)$$

Para $k = 2$ queda:

$$(p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k - 1} = (4, 4)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x, y) = (4, 4) + 2((x, y) - (4, 4)) \iff f(x, y) = (2x - 4, 2y - 4)$$

Para $k = -2$ queda:

$$(p, q) = \frac{(2k, 2k)}{k - 1} = (4/3, 4/3)$$

y la ecuación de la homotecia:

$$f(x, y) = (4/3, 4/4) - 2((x, y) - (4/3, 4/4)) \iff f(x, y) = (-2x + 4, -2y + 4)$$

(1.2 puntos)

7.– *En el plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$, se define la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

Las matrices asociada y de términos cuadráticos de la cónica son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}.$$

El signo de los determinantes de ambas matrices determina el tipo de cónica. Tenemos que:

$$|A| = -k^2, \qquad |T| = 1 - k^2$$

Para ver los valores de k límites de posibles cambios se signo estudiamos cuando se anulan:

$$|A| = 0 \iff -k^2 = 0 \iff k = 0, \quad \text{y } |T| = 0 \iff 1 - k^2 = 0 \iff k = \pm 1.$$

Entonces:

k	$\lvert T\rvert$	$\lvert A\rvert$	TIPO DE CÓNICA
$k < -1$	$-$	$-$	Hipérbola.
$k = -1$	0	$-$	Parábola.
$-1 < k < 0$	$+$	$-$	Elipse.
$k = 0$	$+$	0	Rectas secantes imaginarias cortándose en punto real.
$0 < k < 1$	$+$	$-$	Elipse.
$k = 1$	0	$-$	Parábola.
$k > 1$	$-$	$-$	Hipérbola.

(ii) *Para $k = 2$ hallar el centro, los ejes y la excentricidad.*

Para $k = 2$ vimos que se trata de una hipérbola.

El centro es el punto (p, q) verificando que:

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

donde h es una valor arbitrario y por tanto sólo interesan las dos primeras ecuaciones. Operando queda:

$$\begin{aligned} p - 2q &= 0 \\ -2p + q + 1 &= 0 \end{aligned}$$

y resolviendo el centro es $C = (p, q) = (2/3, 1/3)$.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos de T.

Comenzamos hallando los autovalores de T como raíces de su polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Resolviendo se obtienen los autovalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$.

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(T + 1Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x - 2y = 0.$$

Queda $S_{-1} = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$.

Ahora los autovectores asociados a $\lambda_2 = 3$:

$$(T + 1Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + 2y = 0.$$

Queda $S_{-1} = \mathcal{L}\{(1,-1)\}$.

Un eje es la recta polar del autovector $(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x - y + 1 = 0 \iff x + y - 1 = 0.$$

El otro la recta polar del autovector $(1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 3x - 3y - 1 = 0.$$

Para hallar la excentricidad necesitamos hallar la ecuación reducida canónica de la hipérbola:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \qquad (*)$$

En ese caso sabemos que la excentricidad es $e = c/a = \sqrt{a^2+b^2}/a$.

La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0 \qquad \text{con } d = |A|/|T|$$

(pondemos de primero el autovalor con el mismo signo que $|A|$).

En este caso nos queda:

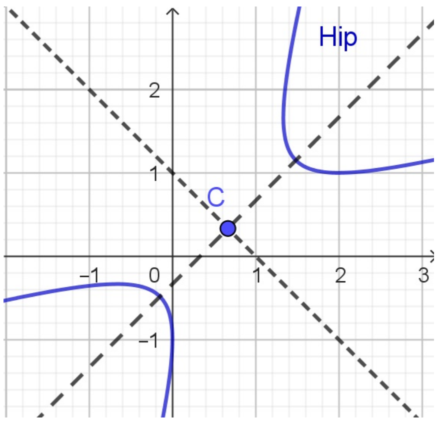
$$-x''^2 + 3y''^2 + \frac{4}{3} = 0.$$

Operamos para ponerla en la forma (*):

$$x''^2 - 3y''^2 = \frac{4}{3} \iff \frac{x''^2}{4/3} - \frac{y''^2}{4/9} = 1.$$

de donde $a^2 = 4/3$ y $b^2 = 4/9$. Entonces la excentricidad queda:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{4/3}{2/\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



(iii) *Demostrar que el eje OY es tangente a la cónica en un mismo punto P que no depende del valor de k. Hallar P.*

Intersecamos el eje OY, es decir, la recta $x = 0$ con la cónica resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de ambas. Será tangente si corta en un punto doble (la correspondiente ecuación de segundo grado tiene una única raíz).

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda queda:

$$y^2 + 2y + 1 = 0.$$

De donde:

$$y = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1.$$

Vemos que hay una única raíz doble y así un único punto de tangencia $P = (0, -1)$.

Otra forma de argumentar (sin tener en cuenta la multipilicidad de la raíz) es comprobar que efectivamente en ese punto P la tangente a la cónica es el eje OY para cualquier valor de k. La recta tangente en el punto $P = (0, -1)$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff kx = 0$$

Si $k \neq 0$ efectivamente queda $x = 0$; si $k = 0$, queda $x = 0$. Significa que el punto $P = (0, -1)$ es un punto singular de la cónica, y que en cierto modo toda recta es tangente en ese punto. De hecho para $k = 0$ vimos que la cónica es un único punto real.

(1.3 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una cónica de excentricidad $e = 2$, un foco en el punto $(4, 2)$ y que tiene por eje la recta $2x + y - 5 = 0$.*

Por ser una cónica de excentricidad $e > 1$ se trata de una hipérbola. Usaremos la caracterización de la hipérbola como lugar geométrico: un punto está en la cónica si la diferencia de distancias a los focos es constante igual a $2a$:

$$|d((x, y), F) - d((x, y), F')| = 2a \qquad (*)$$

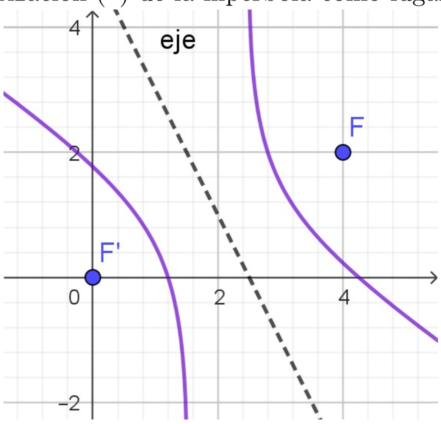
Entonces:

a) Hallaremos el foco F' como el simétrico del conocido $F(4, 2)$ respecto del eje $2x + y - 5 = 0$.

b) Hallaremos c (distancia semifocal) como $c = d(F, F')/2$.

c) Hallaremos a teniendo en cuenta que $2 = e = c/a$.

d) Desarrollaremos la caracterización (*) de la hipérbola como lugar geométrico.



a) El foco $F'(p, q)$ cumple que:

- El punto medio de F y F' está en el eje, es decir, $(F + F')/2 = ((4+p)/2, (2+q)/2)$ cumple la ecuacin $2x + y - 5 = 0$:

$$4 + p + \frac{2+q}{2} - 5 = 0 \iff 2p + q = 0$$

- El vector $\vec{F}F' = F' - F = (p - 4, q - 2)$ es perpendicular al eje, o lo que es lo mismo, paralelo a su vector normal $(2, 1)$:

$$\begin{vmatrix} p-4 & q-2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \iff p - 2q = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenemos $F' = (0,0)$.

b) Tenemos:

$$c = \frac{d(F,F')}{2} = \frac{\sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2}}{2} = \sqrt{5}.$$

d) Hallamos a:

$$a = \frac{c}{e} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

e) Desarrollamos (*):

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} - \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{5} \iff \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = \sqrt{5} + \sqrt{x^2+y^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos términos:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 5 + x^2 + y^2 + 2\sqrt{5(x^2+y^2)} \iff 15 - 8x - 4y = 2\sqrt{5(x^2+y^2)}$$

Elevando de nuevo al cuadrado:

$$225 + 64x^2 + 16y^2 - 240x - 120y + 64xy = 20x^2 + 20y^2$$

y simplificando queda:

$$44x^2 - 4y^2 + 64xy - 240x - 120y + 225 = 0.$$

(1.3 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2 + 2xz + 4yz + 4x + 2y + 2z = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada es:

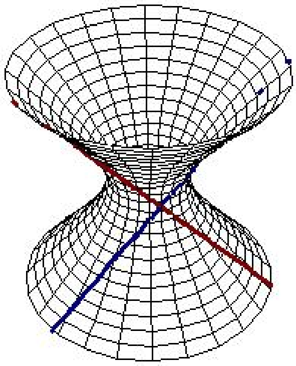
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(2)} \xrightarrow{H_{42}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(2)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(1/4)} \xrightarrow{\mu_{43}(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13/3 \end{pmatrix}$$

Lo signos de la diagonal son $(+,-,+;-)$; reordenando $(+,+,-;-)$. Corresponde a un hiperboloide de una hoja.



(0.6 puntos)