Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **3 de Julio de 2023**

1.– Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se define la aplicación:

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p'(1)q'(1)$$

(i) Demostrar que f es una forma bilineal simétrica.

(ii) Clasificar f indicando además su rango y signatura.

(iii) Dar un par de polinomios que formen una base de vectores conjugados respecto de f.

(iv) Calcular el conjunto de vectores autoconjugados. Si puede escribirse como unión de dos subespacios de dimensión 1 dar un generador de cada uno de ellos.

(v) Hallar $w(1 + 2x)$ siendo w la forma cuadrática asociada a f.

(1.3 puntos)

2.– Se considera $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial euclídeo con un producto escalar respecto al cuál la base $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es ortonormal.

(i) Hallar la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.

(ii) Sea $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$. Hallar las ecuaciones paramétricas de $U^{\perp}$.

(iii) Hallar la proyección ortogonal del vector $(2, 1, 0)$ sobre el subespacio U.

(1.1 puntos)

3.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene por matriz asociada respecto de la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Demostrar que es una transformación ortogonal. Clasificarla y describirla geométricamente.

(1 punto)

4.– Sea F la matriz asociada a una forma cuadrática w. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) Si $traza(F) > 0$ entonces w es definida positiva.

(ii) Si $traza(F) = 0$ y $det(F) \neq 0$ entonces w es indefinida.

(iii) Si $det(F) < 0$ entonces w no puede ser definida positiva.

(iv) Si $det(F) < 0$ entonces w es definida negativa.

(1.2 puntos)

5.– En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $(0,0,1)$ en el punto $(2,2,1)$.

(1 punto)

6.– En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sean las rectas $r: x+y=1$ y $s: x=3$ y el punto $P=(2,2)$.

(i) Hallar la ecuación de una recta t que pase por P de manera que éste sea el punto medio de los puntos de corte de t con las rectas r y s.

(ii) Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleve el punto P en el origen y cuadruplique áreas.

(1.2 puntos)

7.– En el plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$, se define la cónica de ecuación:

$$x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

(i) Clasificar la cónica en función de los valores de k.

(ii) Para $k=2$ hallar el centro, los ejes y la excentricidad.

(iii) Demostrar que el eje OY es tangente a la cónica en un mismo punto P que no depende del valor de k. Hallar P.

(1.3 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una cónica de excentricidad $e=2$, un foco en el punto $(4,2)$ y que tiene por eje la recta $2x+y-5=0$.

(1.3 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2xz + 4yz + 4x + 2y + 2z = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **3 de xullo 2023**

1.– Sexa $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que 1. Defínese a aplicación:

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p'(1)q'(1)$$

(i) Demostrar que f é unha forma bilineal simétrica.

(ii) Clasificar f indicando ademais o seu rango e a súa signatura.

(iii) Dar un par de polinomios que formen unha base de vectores conxugados respecto de f.

(iv) Calcular o conxunto de vectores autoconxugados. Se pode escribirse como unión de dous subespacios de dimensión 1 dar un xerador de cada un deles.

(v) Atopar $w(1 + 2x)$ sendo w a forma cuadrática asociada a f.

(1.3 puntos)

2.– Se considera $\mathbb{R}^3$ como espazo vectorial euclídeo cun producto escalar respecto ó cal a base $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ é ortonormal.

(i) Atopar a matriz de Gram do producto escalar respecto da base canónica.

(ii) Sexa $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$. Atopar as ecuacións paramétricas de $U^\perp$.

(iii) Atopar a proxección ortogonal do vector $(2, 1, 0)$ sobre ol subespazo U.

(1.1 puntos)

3.– No espazo euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera o endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que ten por matriz asociada respecto da base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Demostrar que é unha transformación ortogonal. Clasificala e describila xeométricamente.

(1 punto)

4.– Sexa F a matriz asociada a unha forma cuadrática w. Razoar a veracidade o falsedade das seguintes afirmacións.

(i) Se $traza(F) > 0$ entón w é definida positiva.

(ii) Se $traza(F) = 0$ e $det(F) \neq 0$ entón w é indefinida.

(iii) Se $det(F) < 0$ entón w non pode ser definida positiva.

(iv) Se $det(F) < 0$ entón w é definida negativa.

(1.2 puntos)

5.– No espazo afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ atopar as ecuacións dunha simetría respecto a un plano que leve o punto $(0,0,1)$ no punto $(2,2,1)$.

(1 punto)

6.– No plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sexan as rectas $r : x + y = 1$ e $s : x = 3$ e o punto $P = (2,2)$.

(i) Atopar a ecuación dunha recta t que pase por P de forma que éste sexa o punto medio dos puntos de corte de t coas rectas r e s.

(ii) Atopar as ecuacións dunha homotecia que leve o punto P na orixe e cuadriplique áreas.

(1.2 puntos)

7.– No plano afín para cada $k \in \mathbb{R}$, se define a cónica de ecuación:

$$x^2 - 2kxy + y^2 + 2y + 1 = 0$$

(i) Clasificar a cónica en función dos valores de k.

(ii) Para $k = 2$ atopar o centro, os eixos e a excentricidade.

(iii) Demostrar que o eixo OY é tanxente á cónica nun mesmo punto P que non depende do valor de k. Atopar P.

(1.3 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica de excentricidade $e = 2$, un foco no punto $(4,2)$ e que ten por eixo a recta $2x + y - 5 = 0$.

(1.3 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2xz + 4yz + 4x + 2y + 2z = 0.$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
