Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **26 de Mayo de 2022**

1.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y w su forma cuadrática asociada. Se sabe que:

- $ker(w) = \mathcal{L}\{(1,1)\}$.
- $w(0,1) = 2$

(i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica.

(ii) Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

(iii) Hallar una base de vectores conjugados.

(iv) Hallar los vectores autoconjugados.

(v) Calcular $w(1,2)$. (1 punto)

2.– Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se considera una forma bilineal $f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f es un producto escalar.

(ii) Respecto al producto escalar definido por f:

(ii.a) Dar dos polinomios que formen una base ortonormal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(ii.b) Hallar el ángulo que forman los polinomios $p(x) = 1 + x$ y $q(x) = 1 - x$.

(1 punto)

3.– Sea F_C la matriz asociada a una forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$. Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si f es definida negativa entonces $traza(F_C) < 0$.

(ii) Si $traza(F_C) < 0$ entonces f es definida negativa.

(iii) Si $det(F_C) \neq 0$ y $(F_C)_{11} = 0$, entonces f es indefinida.

(iv) Si $det(F_C) < 0$ entonces f es definida negativa.

(1.2 puntos)

4.– En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar para que valores de a y b, t es una transformación ortogonal.

(ii) Para cada uno de los casos anteriores clasificarla y describirla geométricamente.

(1.5 puntos)

5.– En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ sea el tetraedro de vértices $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,0,1)$ y $D = (1,0,-1)$. Calcular su área y su volumen.

(0.8 puntos)

6.– En plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sean A, B, C los vértices de un triángulo equilátero situado en el semiplano $y \geq 0$, con $A = (0,0)$ y $B = (2,1)$.

(i) Calcular las coordenadas de C.

(ii) Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que lleve el vértice A en el B.

(1.2 puntos)

7.– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y = 0$$

(i) Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida.

(ii) Hallar el centro, sus asíntotas y la distancia entre sus dos vértices.

(iii) Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(0,-2)$.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una hipérbola sabiendo que su centro es $(1,1)$, tiene un vértice en $(0,0)$ y pasa por el punto $(4,1)$.

(1.3 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 4x - 4y - 1 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.5 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio único (3 horas.) **26 de maio 2022**

1.– Sexa $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unha forma bilineal simétrica e w a súa forma cuadrática asociada. Se sabe que:

- $ker(w) = \mathcal{L}\{(1,1)\}$.
- $w(0,1) = 2$

(i) Calcular a matriz asociada a w na base canónica.

(ii) Clasificar a forma cuadrática indicando ademais o seu rango e a súa signatura.

(iii) Atopar unha base de vectores conxugados.

(iv) Atopar os vectores autoconxugados.

(v) Calcular $w(1,2)$. (1 punto)

2.– Sexa $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que 1. Se considera unha forma bilineal $f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, de matriz asociada respecto á base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f é un producto escalar.

(ii) Respecto ó producto escalar definido por f:

(ii.a) Dar dous polinomios que formen unha base ortonormal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(ii.b) Atopar o ángulo que forman os polinomios $p(x) = 1 + x$ e $q(x) = 1 - x$.

(1 punto)

3.– Sexa F_C a matriz asociada a unha forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$. Indica razoadamente a falsedade ou veracidade das seguintes cuestións:

(i) Se f é definida negativa entón $traza(F_C) < 0$.

(ii) Se $traza(F_C) < 0$ entón f é definida negativa.

(iii) Se $det(F_C) \neq 0$ e $(F_C)_{11} = 0$, entón f é indefinida.

(iv) Se $det(F_C) < 0$ entón f é definida negativa.

(1.2 puntos)

4.– No espazo euclidiano $\mathbb{R}^3$ se considera a aplicación lineal $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto da base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar para que valores de a e b, t é unha transformación ortogonal.

(ii) Para cada un dos casos anteriores clasificala e describila xeométricamente.

(1.5 puntos)

5.– No espazo afín euclidiano $\mathbb{R}^3$ sexa o tetraedro de vértices $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (0,0,1)$ e $D = (1,0,-1)$. Calcular a súa área e o seu volumen.

(0.8 puntos)

6.– No plano afín euclidiano $\mathbb{R}^2$ sexan A, B, C os vértices dun triángulo equilátero situado no semiplano $y \geq 0$, con $A = (0,0)$ e $B = (2,1)$.

(i) Calcular as coordeadas de C.

(ii) Atopar as ecuacións dunha simetría respecto a una recta que leve o vértice A no B.

(1.2 puntos)

7.– No plano afín dada a cónica de ecuación:

$$x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y = 0$$

(i) Clasificar a cónica e dar a súa ecuación reducida.

(ii) Atopar o centro, as súas asíntotas e a distancia entre os seus dous vértices.

(iii) Calcular as rectas tanxentes á cónica que pasan polo punto $(0,-2)$.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha hipérbola sabendo que o seu centro é $(1,1)$, ten un vértice en $(0,0)$ e pasa polo punto $(4,1)$.

(1.3 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 4x - 4y - 1 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.5 puntos)
