Sean $c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8$ *las ocho cifras de tu DNI*$^{(1)}$. *Por ejemplo si el DNI es* 32478910, *entonces* $c_1 = 3$,$c_2 = 2$, $c_3 = 4$, $c_4 = 7$, $c_5 = 8$, $c_6 = 9$, $c_7 = 1$, $c_8 = 0$.

Para cada i, *con* $1 \leq i \leq 8$ *llamamos* a_i *al resto de* c_i *módulo* 3, *es decir, el resto que se obtiene al dividir* c_i *por* 3. *En el ejemplo anterior* $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 2$, $a_6 = 0$, $a_7 = 1$, $a_8 = 0$.

El trabajo consiste en contar cuantas matrices pueden formarse con los OCHO números $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ *cumpliendo ciertas condiciones que varían en cada apartado.* **Se entenderá que en cada matriz los números sólo pueden repetirse, a lo sumo, tantas veces como aparezcan repetidos en la lista anterior**. *Por ejemplo si obtuvimos* $0, 2, 1, 1, 2, 0, 1, 0$ *las matrices pueden contener hasta un máximo de* 3 *ceros o* 3 *unos, pero un máximo de* 2 *doses. Es decir serían válidas las matrices:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pero **NO** *serían válidas las matrices:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Llamaremos C *al conjunto de matrices* 2×2 *que pueden formarse en estas condiciones.*

Consideramos el DNI: 12344679. Los restos de dividir cada cifra por tres son respectivamente 12011010; por tanto contamos con 4 unos, 3 ceros y un 2.

1. *Calcular el cardinal de* C.

   Sólo manejamos tres tipos de cifras $0, 1, 2$. El conjunto C está formado por matrices de 4 elementos. Si no tuviésemos limitado la cantidad de elementos de cada tipo de cifra, simplemente contaríamos los grupos de 4 elementos elegidos entre 3 posibles, pudiendo repetirlos y de manera que el orden importa (porque una matriz con los mismos elementos que otra pero en distinto orden es diferente). Son variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4: $VR_{3,4} = 3^4 = 81$.

   Pero como tenemos limitado el número de unos, doses y ceros, restaremos las configuraciones que no pueden darse:

   - Eliminamos matrices con las cuatro cifras iguales a cero o dos, ya que no tenemos cuatro de ninguna de ellas. Hay una matriz de este tipo con cada una de las esas dos cifras. Restaremos 2 matrices.

   - Eliminamos matrices con exactamente tres doses, ya que sólo tenemos 1. Hay $C_{4,3}$ formas de elegir la tres posiciones donde van los doses y 2 opciones (uno o cero) para la cifra que no es un dos. En total $2 \cdot C_{4,3} = 2 \cdot 4 = 8$.

   - Eliminamos matrices con exactamente dos doses, ya que sólo tenemos 1. Hay $C_{4,2}$ formas de elegir las dos posiciones donde van los doses; en los sitios libres pueden ir en cada uno de ellos el cero o el uno: 2^2 opciones. En total $2^2 \cdot C_{4,2} = 4 \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 6 = 24$.

   En definitiva quedan:

   $$81 - 2 - 8 - 24 = 47$$

   elementos en el conjunto C.

2. *¿Cuántas matrices del conjunto* C *son simétricas?.*

Una matriz simétrica 2×2 es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Dado que sólo tenemos un dos, éste nunca puede ser el elemento b.

Entonces para b tenemos dos opciones 1 o 0. Por cada una de ellas para a y c tres opciones (con un matiz), $0, 1, 2$; pero el 2 no puede aparecer dos veces: serían entonces $3 \cdot 3 - 1 = 8$ opciones. Conjuntamente $2 \cdot 8 = 16$ matrices. Pero todavía hay que descontar la matriz formada sólo por 3s porque sólo tenemos tres. Nos quedan: $16 - 1 = 15$.

3. *¿Cuántas matrices del conjunto C son antisimétricas?.*

   Las antisimétricas cumplen $A = -A^t$; equivalentemente son de la forma:

   $$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

   Como no tenemos elementos negativos la única posibilidad sería la matriz formada por ceros; pero sólo tenemos 3 ceros. Por tanto NO hay matrices antisimétricas en el conjunto C y su cardinal es cero.

4. *¿Cuántas matrices de C conmutan con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?.*

   Analizamos cuando una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ conmuta con A:

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Haciendo cuentas e igualando queda:

   $$2a = 2a, \qquad 3b = 2b, \quad 2c = 3c, \quad 3d = 3d$$

   que equivale a $c = b = 0$. Por tanto las matrices que conmutan con A son de la forma:

   $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

   Tenemos tres cifras posibles para a, b excepto las dos iguales a 0 ó a 2, porque no tenemos ni cuatro ceros ni dos doses.

   Por tanto el cardinal en este caso es $3 \cdot 3 - 2 = 7$.

5. *¿Cuántas matrices de C conmutan con $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?.*

   Analizamos cuando una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ conmuta con B:

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Haciendo cuentas e igualando queda:

   $$a + b = a + c, \qquad a + b = b + d, \quad c + d = a + c, \quad c + d = b + d$$

   que equivale a $b = c$ y $a = d$. Por tanto las matrices que conmutan con A son de la forma:

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Dado que sólo tenemos un dos, ninguna de las dos variables puede tomar ese valor. Y como sólo tenemos tres ceros, la única posibilidad es que (a, b) sea $(1,1), (1,0)$ o $(0,1)$, es decir, el cardinal en este caso es 3.

6. *Sea el conjunto* $F = \{traza(A^t)|A \in C\}$. *Calcular* $cardinal(F)$.

   Dado que las matrices sólo tienen los elementos $0, 1$ o 2 y el dos a lo sumo una vez, el valor máximo de la traza de una de esas matrices es a lo sumo $2 + 1 = 3$ y el mínimo $0 + 0 = 0$. Vemos que se alcanzan todos esos valores para matrices concretas de C:

$$tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0, \quad tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1,$$
$$tr\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2, \quad tr\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3$$

   Por tanto hay 4 posibles trazas distintas: el cardinal pedido es 4.

7. *Sea el conjunto* $G = \{traza(AA^t)|A \in C\}$. *Calcular* $cardinal(G)$.

   Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces:

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

   y por tanto
$$traza(AA^t) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

   Dado que los posibles valores de a, b, c, d son $0, 1, 2$ con un máximo de un 2 y un mximo de tres 3, los posibles valores de esta suma son como míno $0^2+0^2+0^2+1^2 = 1$ y como máximo $2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 7$. Vemos además que se alcanzan los valores intermedios:

$$\begin{gathered} 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2 \\ 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \\ 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4 \\ 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 5 \\ 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 = 6 \end{gathered}$$

   Por tanto el total de posibles valores (es decir el cardinal pedido) es 7.