Si d_1 y d_2 son las dos útlimas cifras de tu DNI, a lo largo del problema llamaremos $a = 2 + [d_1/2]$ y $b = 2 + [d_2/2]$, donde $[x]$ es la función parte entera de x, es decir, el mayor entero menor o igual que x.

Se trata de contar cuantas claves de longitud dada podemos formas combinando las a primeras letras del alfabeto y las b primeras cifras $(0, 1, \dots, b-1)$, bajo ciertas condiciones.

1. *¿Cuántas claves de 7 caracteres pueden formarse?*

   En total tenemos $a+b$ caracteres distintos; en cada una de las siete posiciones podemos colocar cualquiera de ellos. Por tanto las posibilidades totales son:

   $$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{7 \text{ veces}} = (a+b)^7$$

   De otra forma. Cada clave es un grupo de 7 elementos, escogido de entre $a+b$ distintos; en cada grupo (clave) pueden aparecer caracteres repetidos y los mismos caracteres en distinto orden corresponden a claves diferentes: importa el orden. Se trata de variaciones con repetición de $(a+b)$ elementos tomados de 7 en 7:

   $$VR_{a+b,7} = (a+b)^7.$$

2. *¿Cuántas de longitud 7 dónde se alternen letras y números (en ellas no aparecen un par de letras juntas ni un par de números juntos)?*

   Si empiezan por una letra necesariamente seguirán la secuencia $LNLNLNL$, es decir, estarán formadas por 4 letras y 3 números colocados alternativamente. Razonando como en el apartado anterior, las posibliades para las letras son a^4 y para los números b^3. En conjunto: a^4b^3.

   Análogamente si empiezan por número estarán formadas por 3 letras y 4 números colocados alternativamente: son a^3b^4 posibilidades.

   En total:

   $$a^4b^3 + a^3b^4 = a^3b^3(a+b).$$

3. *Generaliza el apartado anterior para cadenas de longitud n arbitraria.*

   La idea es la misma, diferenciar si se empieza por una letra o por un número. Pero tenemos que distinguir si n es par o impar.

   - Si n es par entonces tanto si empezamos con una letra como si empezamos con un número, se colocarán alternativamente $n/2$ letras y $n/2$ números. Por tanto razonando como antes las posibilidades serán:

   $$a^{n/2}b^{n/2} + a^{n/2}b^{n/2} = 2(ab)^{n/2}.$$

   - Si n es impar entonces si empezamos con letra y alternamos habremos usado una letra más que números; en concreto $(n+1)/2$ letras y $(n-1)/2$ números. Las posibilidades para elegirlos son $a^{(n+1)/2}b^{(n-1)/2}$. Análogamente si empezamos por números, las opciones son $a^{(n-1)/2}b^{(n+1)/2}$. En total:

   $$a^{(n+1)/2}b^{(n-1)/2} + a^{(n-1)/2}b^{(n+1)/2} = (ab)^{(n-1)/2}(a+b)$$

4. *¿Cuántas claves de 7 caracteres con exactamente 3 letras y 4 números pueden formarse?*

   Primero contamos las formas de elegir en qué tres posiciones de las 7 irán las letras. Son las formas de elegir 3 elementos (posiciones) distintas entre un total de 7, sin importar el orden (da igual escoger las posciones 2,3,5 que 5,3,2). Combinaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 3 en 3:

   $$C_{7,3} = \binom{7}{3}$$

   Fijado donde están situadas las letras y números, como en los apartados anteriores, las posibilidades para elegir las 3 letras son a^3 y los cuatro números b^4. En total:

   $$\binom{7}{3} \cdot a^3b^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^4 = 35a^3b^4.$$

5. *Ahora consideramos claves de longitud n donde no aparecen dos letras consecutivas (pero si pueden aparecer varios números seguidos). Sea x_n la cantidad de tales claves que acaban en una letra e y_n las que terminan en un número.*

   (a) *Justifica que $x_{n+1} = a\cdot y_n$ e $y_{n+1} = b\cdot(x_n+y_n)$.*

   Una clave sin letras consecutivas de longitud $n+1$ que termina por una letra necesariamente se ha formado añadiendo una letra a una de longitud n que acaba por un número (ya que no puede haber dos letras seguidas). El número de tales claves sin letras consecutivas de longitud n acabadas en número es y_n. Para esa letra añadida tenemos a posibilidades. Por tanto:

   $$x_{n+1} = a\cdot y_n$$

   Por otra parte, una clave sin letras consecutivas de longitud $n+1$ que termina por un número se ha formado añadiendo un número a una de longitud n (que puede acabar tanto en letra como en número, porque no hay restricción para los caracteres adyacentes a un número). El número de tales claves de longitud n es x_n+y_n y para el número añadido tenemos b posibilidades. Así

   $$y_{n+1} = b\cdot(x_n+y_n)$$

   (b) *Expresa la relación anterior matricialmente, encontrando $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que:*

   $$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

   Simplemente si tomamos:

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

   entonces:

   $$A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_n \\ bx_n + by_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(c) *Demostrar por inducción que:*

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Para $n = 1$ es inmediato:

$$A^{1-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = Id \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Ahora lo suponemos cierto para $n = k$, es decir:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A^{k-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

y lo probaremos para $n = k + 1$, es decir, probaremos que:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A^{k} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente:

$$A^k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = AA^{k-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Usando la hipótesis de inducción queda:

$$A^k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

y por la relación vista en (b):

$$A^k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$$

(d) *Utilizando lo anterior, calcula el número de claves de longitud* 9 *donde no aparecen dos letras consecutivas.*

Lo que nos piden es $x_8 + y_8$ (ya que queremos tanto las acabadas en letra como las acabadas en número). Por lo visto en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \end{pmatrix} = A^{8} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Donde x_1 son las claves de longitud 1 acabadas en letra: hay tantas como letras, es decir, a; e y_1 las de longitud 1 acabadas en número: hay tantas como números, es decir, b. Por tanto:

$$\begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \end{pmatrix} = A^{8} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Por ejemplo si $a = 4$ y $b = 5$. Tendríamos:

$$\begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \end{pmatrix} = A^{8} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Y:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 25 & 45 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = 25\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = 25\begin{pmatrix} 36 & 52 \\ 65 & 101 \end{pmatrix}.$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = 625\begin{pmatrix} 36 & 52 \\ 65 & 101 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 & 52 \\ 65 & 101 \end{pmatrix} = \\ = 25\begin{pmatrix} 54324 & 82820 \\ 103525 & 15784 \end{pmatrix}.$$

por tanto:

$$\begin{pmatrix} x_9 \\ y_9 \end{pmatrix} = 625\begin{pmatrix} 54324 & 82820 \\ 103525 & 15784 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33952500 \\ 64703125 \end{pmatrix}$$

y finalmente:

$$x_9 + y_9 = 33952500 + 64703125 = 98655625.$$

Observaciones:

i. Para aplicar esta idea para una clave de longitud n cualquiera, sería deseable tener una forma cómoda de calcular A^{n-1}. Más adelante veremos como hacerlo mediante el uso de autovalores y autovectores.

ii. Hay otra forma de llegar a una fórmula cerrada para $x_n + y_n$. Se puede probar que en una clave de longitud n las formas de elgir k posiciones NO consecutivas para k letras es, $C_{n+1-k,k}$. Fijadas esas posiciones hay a^k posibilidades para las letras y b^{n-k} para los números. De ahí se deduce que:

$$x_n + y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-k}{k} a^k b^{n-k}$$

entendiendo que $\binom{p}{q} = 0$ si $q > p$