ÁLGEBRA LINEAL I

Soluciones a la Práctica 7

Endomorfismos

(Curso 2010–2011)

1.– *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Estudiar si es triangularizable por semejanza.*

El polinomio característico es:

$$|A - \lambda Id| = -(\lambda - 1)^4(\lambda - 2).$$

Por tanto hay dos autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{con multiplicidad algebraica } 4 \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{con multiplicidad algebraica } 1 \end{aligned}$$

La suma de las multiplicidades algebraicas coincide con la dimensión de la matriz. Por tanto esta triangulariza.

(b) *Hallar sus autovalores y autovectores.*

Los autovalores asociados al autovalor 1 cumplen:

$$(A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0, \quad t = 0.$$

Son dos ecuaciones independientes, por tanto el subespacio característico tiene dimensión $5 - 2 = 3$. Buscamos una base del mismo:

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

Los autovalores asociados al autovalor 2 cumplen:

$$(A - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - 2y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0, \quad u = 0.$$

Son cuatro ecuaciones independientes, por tanto el subespacio característico tiene dimensión $5 - 4 = 1$. Buscamos una base del mismo:

$$S_2 = \mathcal{L}\{(2, 1, 0, 0, 0\}.$$

(c) *Calcular, si es posible, la forma de Jordan indicando la correspondiente matriz de paso.*

Hemos visto que las multiplicidades algebraicas y geométricas de los autovalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, \quad m.a. = 4, \quad m.g. = 3 \\ \lambda_2 = 2, \quad m.a. = 1, \quad m.g. = 1 \end{aligned}$$

Entonces hay 3 cajas de Jordan asociadas al autovalor 1 y una asociada al autovalor 2. La forma de Jordan es por tanto:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la matriz paso, calculamos los vectores de la nueva base correspondientes al autovalor 1. Seguimos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{cc} V_1 & V_2 \\ v_1 = v_2(A - Id) & v_2 \\ u_1 & \\ w_1 & \end{array}$$

donde $V_i = ker(A - Id)^i$. Además v_2 es un vector de V_2 que no está en V_1 y u_1, w_1 son vectores de V_1, es decir, autovectores independientes con los anteriores.

Calculemos es espacio V_2. Tenemos:

$$(A - Id)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$V_2 = \{(x, y, z, y, u) | \, x - y = 0\}.$$

Tomamos $v_2 = (0, 0, 0, 1, 0)$. Entonces nos queda $v_1^t = (A - Id)v_1^t = (0, 0, 0, 0, -1)^t$. Y podemos escoger $u_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$, $w_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

Para el autovalor 2 basta tomar un autovector: $(2, 1, 0, 0, 0)$.

En definitiva la matriz de paso queda:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De manera que:

$$J = PAP^{-1}.$$

(d) *Calcular una matriz M tal que $A^{2007} = PMP^{-1}$.*

Sabemos que:

$$J = P^{-1}AP.$$

Por tanto:

$$A = PJP^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad A^{2007} = PJ^{2007}P^{-1}.$$

Luego basta calcular $M = J^{2007}$. Para ello descomponemos J en su parte diagonal y en una matriz B:

$$J = D + B, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como D y B conmutan, y $B^k > 0$ si $k > 1$, aplicando el Binomio de Newton queda:

$$J^{2007} = (D + B)^{2007} = D^{2007} + 2007D^{2006}B.$$

Operando queda:

$$M = J^{2007} = \begin{pmatrix} 1 & 2007 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{2007} \end{pmatrix}.$$

2.– *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Probar que A es una matriz triangularizable.*

Una matriz cuadrada es triangularizable si la suma de las multiplicidades algebraicas de sus autovalores coincide con su dimensión.

Calculemos los autovalores. Son las raíces de su polinomio característico:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda Id| = (-1-\lambda)^2\lambda^2.$$

Vemos que hay dos autovalores:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0; \qquad m(\lambda_1) = 2; \\ &\lambda_2 = -1; \qquad m(\lambda_2) = 2; \end{aligned}$$

La suma de las multiplicidades es 4 y por tanto A triangulariza.

(b) *Hallar la forma de Jordan J de A y una matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$.*

Comenzamos estudiando las cajas de Jordan asociadas al autovalor $\lambda_1 = 0$.

Se tiene:

$$dim(ker(A - \lambda_1 Id)) = 4 - rango(A) = 4 - 3 = 1;$$

Por tanto hay una única caja de Jordan asociada al autovalor 0. Para buscar la base en la que se obtiene tenemos que encontrar dos vectores $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \subset & V_2 \\ \bar{x}_1 = A\bar{x}_2 & & \bar{x}_2 \end{array}$$

Donde

$$V_i = ker((A - \lambda_1 Id)^i) = ker(A^i), \quad \text{para } i = 1, 2,$$

y el vector $\bar{x}_2$ debe de ser un vector de V_2, de manera que al calcular $\bar{x}_1 = A\bar{x}_2$ no obtengamos el vector nulo.

Se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$V_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\, A^2(x,y,z,t)^t = \bar{0}\} = \{(x,y,z,y) \in \mathbb{R}^4 |\, y = t = 0\} = \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}.$$

Tomamos $\bar{x}_2 = (1,0,0,0)$ y obtenemos $\bar{x}_1 = A\bar{x}_2 = (-1,0,1,0)$.

Ahora estudiamos las cajas de Jordan asociadas al autovalor $\lambda_2 = -1$.

Se tiene:

$$dim(ker(A-\lambda_2 Id)) = 4 - rango(A+Id) = 4 - rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4-3 = 1;$$

Por tanto hay una única caja de Jordan asociada al autovalor -1. De nuevo, para buscar la base en la que se obtiene tenemos que encontrar dos vectores $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc} U_1 & \subset \quad U_2 \\ \bar{y}_1 = (A+Id)\bar{y}_2 & \quad \bar{y}_2 \end{array}$$

Donde

$$U_i = ker((A-\lambda_2 Id)^i) = ker((A+Id)^i), \qquad \text{para } i = 1, 2,$$

y el vector $\bar{y}_2$ debe de ser un vector de U_2, de manera que al calcular $\bar{y}_1 = (A+Id)\bar{y}_2$ no obtengamos el vector nulo.

Ahora:

$$(A+Id)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\, (A+Id)^2(x,y,z,t)^t = \bar{0}\} = \{(x,y,z,y) \in \mathbb{R}^4 | \begin{array}{l} x+2y+2z+2t=0 \\ 2x+3y+3z+3t=0 \end{array}\} =$$

$$= \mathcal{L}\{(0,1,-1,0),(0,1,0,-1)\}.$$

Escogemos $\bar{y}_2 = (0,1,-1,0)$, $\bar{y}_1 = (A+Id)\bar{y}_2 = (0,0,-1,1)^t$.

En definitiva la forma de Jordan y la matriz de paso correspondiente son:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) *Calcular los subespacios de autovectores de A.*

Los espacios de autovectores de A son

$$\begin{array}{rl} S_{\lambda_1} = S_0 = V_1 = ker(A-\lambda_1 Id) & \text{asociado a } \lambda_1 = 0. \\ S_{\lambda_2} = S_{-1} = U_1 = ker(A-\lambda_2 Id) & \text{asociado a } \lambda_2 = -1. \end{array}$$

Ambos subespacios son de dimensión 1 ya que la multiplicidad geométrica de los dos autovalores es 1. En el apartado anterior hemos calculado además un vector que los genera:

$$S_0 = \mathcal{L}\{(-1,0,1,0)\}; \qquad S_{-1} = \mathcal{L}\{(0,0,-1,1)\}.$$

(d) *Calcular A^{10}.*

Método I: Teniendo en cuenta que $J = P^{-1}AP$ se tiene:

$$A^{10} = PJ^{10}P^{-1}.$$

Calculemos J^{10}:

$$J = B + C, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además $C^k = \Omega$ si $k \geq 2$. Entonces:

$$J^{10} = (B+C)^{10} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} B^{10-i} C^i = B^{10} + 10B^9 C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{10} = PJ^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Método II: Calculamos las potencias bajas de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Intuimos que la potencia n-sima de A puede ser

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n(n-1) & 0 & (-1)^{n+1} \\ 0 & (-1)^{n+1}n & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Probemos por inducción que esta fórmula es cierta para $n \geq 2$:

- Para $n = 2$ hemos visto que se cumple.

- Supongámosla cierta para $n-1$ y probémosla para n:

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1}(n-2) & 0 & (-1)^n \\ 0 & (-1)^n(n-1) & 0 & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Las únicas operaciones no directas aparecen en las posiciones $(3,2)$ y $(4,2)$. Tenemos en cuenta que:

$(-1)(-1)^{(n-1)}(n-2) + (-1)^n = (-1)^n(n-2) + (-1)^n = (-1)^n(n-2+1) = (-1)^n(n-1).$
$(-1)(-1)^n(n-1) + (-1)^{(n-1)} = (-1)^{(n+1)}(n-1) + (-1)^{(n+1)} = (-1)^{(n+1)}(n-1+1) = (-1)^{(n+1)}n.$

y obtenemos:

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n(n-1) & 0 & (-1)^{n+1} \\ 0 & (-1)^{n+1}n & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Por tanto la potencia pedida será:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.– *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) *Hallar los autovalores y autovectores de A.*

El polinomio característico es:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda Id) = \lambda^4.$$

Por tanto hay un único autovalor $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad algebraica 4.

Calculamos los autovectores:

$$(A - 0 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y = 0,$$

y así:

$$S_0 = \mathcal{L}\{(1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$$

b) *Calcular una forma de Jordan asociada a A, indicando la correspondiente matriz de paso P.*

Del apartado anterior deducimos que la matriz es triangularizable por semejanza ya que todos sus autovalores son reales. Además como la multiplicidad geométrica (el número de autovectores independientes) de su único autovalor es 3, hay 3 cajas de Jordan de tamaño total 4. La forma de Jordan será:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la matriz de paso P buscamos cuatro vectores según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} Ker(A - 0 \cdot Id) & \subset & ker(A - 0 \cdot Id)^2 \\ u_1 = Au_2 & & u_2 \\ v_1 & & \\ w_1 & & \end{array}$$

de manera que los tres vectores u_1, v_1, w_1 sean independientes. Tenemos que:

$$A^2 = Id.$$

Por tanto $ker(A - 0 \cdot Id)^2 = \mathbb{R}^4$ y u_2 puede ser cualquier vector verificando que $u_2 A \neq (0,0,0,0)$. Tomamos $u_2 = (1,0,0,0)$ y $u_1 = Au_2 = (-1,-1,-1,-1)$.

Finalmente los vectores v_1, w_1 son otros dos autovectores independientes de u_1. Por ejemplo:

$$v_1 = (0,0,1,0), \quad w_1 = (0,0,0,1).$$

La matriz de paso nos queda:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) *Calcular* $(A + Id)^{2010}$.

Como A e Id conmutan podemos usar la fórmula del binomio de Newton:

$$(A+Id)^{2010} = \sum_{n=0}^{2010} \binom{2010}{n} A^n.$$

Tenemos en cuenta además que $A^2 = 0$ y por tanto $A^n = 0$ para $n > 1$. Así nos queda:

$$(A+Id)^{2010} = Id + 2010A = \begin{pmatrix} -2009 & 2010 & 0 & 0 \\ -2010 & 2011 & 0 & 0 \\ -2010 & 2010 & 0 & 0 \\ -2010 & 2010 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.– *Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Determinar los valores de a para los cuales f es diagonalizable.*

El endomorfismo triangulariza si todos sus autovalores son reales y las multiplicidades geométricas y algebraicas coinciden. Comenzamos calculando el polinomio característico, cuyas raíces son los autovalores:

$$|F_C - \lambda Id| = (1-\lambda)^2(a-\lambda)(2-\lambda)$$

Vemos que en todos caso la suma de las multiplicidades algebraicas siempre es 4, igual a la dimensión del espacio donde trabajamos; por tanto siempre triangulariza. Dependiendo de los valores de a variarán las multiplicidades algebraicas del 1 y 2. Recordemos además que si la algebraica vale 1 la geométrica también. Por tanto sólo nos intersar comprobar la geométrica cuando la algebraica sea superior a la unidad. Distinguimos por tanto varios casos:

- Si $a = 1$ entonces los autovalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{m.a.=3} \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{m.a.=1} \end{aligned}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es:

$$m.g.(1) = dim(ker(F_C - Id)) = 4 - rango(F_C - Id) = 4 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = m.a(1)$$

Las multiplicidades geométricas y algebraicas de todos los autovalores coinciden y por tanto diagonaliza.

- Si $a = 2$ entonces los autovalores son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{m.a.=2} \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{m.a.=2} \end{aligned}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es:

$$m.g.(1) = dim(ker(F_C - Id)) = 4 - rango(F_C - Id) = 4 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = m.a(1)$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 2$ es:

$$m.g.(2) = dim(ker(F_C - 2Id)) = 4 - rango(F_C - Id) = 4 - rango \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq m.a(2)$$

Por tanto NO diagonaliza.

- Si $a \neq 1, 2$ entonces los autovalores son: - Si $a = 1$ entonces los autovalores son:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \text{m.a.=2} \\ \lambda_2 = 2 & \text{m.a.=1} \\ \lambda_3 = a & \text{m.a.=1} \end{array}$$

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es:

$$m.g.(1) = dim(ker(F_C - Id)) = 4 - rango(F_C - Id) = 4 - rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = m.a(1)$$

Las multiplicidades geométricas y algebraicas de todos los autovalores coinciden y por tanto diagonaliza.

(b) *Para aquellos valores para los que f triangulariza pero no diagonaliza, hallar una matriz J de Jordan y una base B, en la cual la matriz asociada a f respecto de la base B sea J.*

Hemos visto que el único caso en el que triangulariza pero no diagonaliza es para $a = 2$. En ese caso tenemos los autovalores:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 1 & \text{m.a.=2} & \text{m.g.=2} \\ \lambda_2 = 2 & \text{m.a.=2} & \text{m.g.=1} \end{array}$$

Por tanto hay dos cajas de Jordan de tamaño 1 asociadas al autovalor 1 y una de tamaño 2 asociada al autovalor 2. La forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la base en la cual es la matriz asociada a f, trabajamos independientemente para cada autovalor.

Para $\lambda = 1$ los vectores de la base son precisamente los autovectores:

$$S_1 = ker(F_C - \lambda Id) = \{(F_C - \lambda Id)(x, y, z, t)^t = (0, 0, 0, 0)^t\} = \mathcal{L}\{1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$

Para $\lambda = 2$ buscamos vectores según el esquema:

$$\begin{array}{cc} ker(F_C - 2Id) & ker(F_C - 2Id)^2 \\ (F_C - 2Id)u_2 & u_2 \end{array}$$

donde $u_2 \in ker(F_C - 2Id)^2$ y $(F_C - 2Id)u_2 \neq 0$. Calculemos las ecuaciones de $ker(F_C - 2Id)$:

$$(F_C - 2Id)(x, y, z, t)^t = (0, 0, 0, 0)^t \iff x - 2t = 0, \quad y = 0.$$

Escogemos $u_2 = (2, 0, 0, 1)$ de manera que $(F_C - 2Id)u_2^t = (0, 0, 1, 0)^t$.

Por fin la base pedida B es:

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}.$$

(c) *Para $a = 1$, hallar, si es posible, una matriz diagonal asociada a f.*

Vimos que f diagonalizaba. Además los autovalores eran:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{m.a.=3} \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{m.a.=1} \end{aligned}$$

Por tanto una matriz diagonal asociada a f es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) *¿Existe alguna base B' y algún valor de a tal que:*

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ?.$$

Razona la respuesta.

Si existiese los autovalores de f serían:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{m.a.=2} \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{m.a.=2} \end{aligned}$$

Pero hemos visto que en ese caso $a = 2$ y la matriz no diagonaliza. Por tanto no es posible que exista la base B' en las condiciones descritas.

5.– *Se considera la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a & a+1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(a) *Determinar los valores de a para las cuales la matriz es triangularizable. Indicar cuando es además diagonalizable.*

La matriz A es triangularizable cuando todos sus autovalores son reales. Calculemos su polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = (1-\lambda)^2(a+1-\lambda)$$

Vemos que en cualquier caso todos los autovalores son reales luego SIEMPRE ES TRIANGULARIZABLE.

La matriz A será además diagonalizable cuando las multiplicidades aritméticas y geométricas de los autovalores coincidan. Los autovalores son 1 y $a+1$. Pero ambos pueden coincidir (si $a+1=1$). En cualquier caso calculemos la multiplicidad geométrica del autovalor 1 en función de a:

$$m_g(1) = dim(Ker(A - Id)) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Luego:

$$m_g(1) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \neq 0, 1. \\ \\ 2 \text{ si } a = 0 \text{ ó } a = 1. \end{cases}$$

En consecuencia, distinguimos los siguientes casos:

- Si $a = 0$ hay un único autovalor $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 3 y geométrica 2. Por tanto la matriz A NO diagonaliza.

- Si $a = 1$ hay dos autovalores: $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y geométrica 2, y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 1. Dado que la geométrica al menos siempre vale 1 y no puede ser superior a la algebraica, deducimos que A SI diagonaliza.

- Si $a \neq 0, 1$, hay dos autovalores: $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1, y $\lambda_2 = a + 1$ con multiplicidad algebraica 1. Por tanto la matriz A NO diagonaliza.

(b) *Para los valores de a para los cuales A es triangularizable pero no diagonalizable, calcular la forma canónica de Jordan J de A y una matriz P tal que $J = PAP^{-1}$.*

- Supongamos que $a = 0$.

Entonces hay un único autovalor $\lambda_1 = 1$. La multiplicidad geométrica es 2. Por tanto hay dos cajas de Jordan y la matriz J será:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz P pedida necesitamos hallar la base en la que se obtiene J. Buscamos vectores:

$$\begin{matrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \\ \bar{v}_1 & \end{matrix}$$

donde $\bar{u}_2 \in Ker(A - Id)^2$, pero $\bar{u}_2 \notin Ker(A - Id)$; $\bar{u}_1 = (A - Id)\bar{u}_2$ y $\bar{v}_1 \in Ker(A - Id)$ y es independiente de $\bar{u}_1$.

Hagamos los cálculos:

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A - Id)^2 = \Omega.$$

Entonces:

$$Ker(A - Id) = \{(x, y, z)/y = 0\}; \qquad Ker(A - Id)^2 = \mathbb{R}^3.$$

Podemos tomar $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{u}_1 = (-1, 0, 0)$, $\bar{v}_1 = (0, 0, 1)$. La matriz P pedida queda:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Supongamos $a \neq 0, 1$.

Entonces hay dos autovalores $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1, y $\lambda_2 = a + 1$ con multiplicidad 1. La forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz P pedida necesitamos hallar la base en la que se obtiene J. Primero calculamos los vectores relativos al autovalor 1:

$$\begin{matrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \end{matrix}$$

donde $\bar{u}_2 \in Ker(A - Id)^2$, pero $\bar{u}_2 \notin Ker(A - Id)$; $\bar{u}_1 = (A - Id)\bar{u}_2$.

Hagamos los cálculos:

$$A - Id = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}; \quad (A - Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$Ker(A-Id)=\{(x,y,z)/y=z=0\};\qquad Ker(A-Id)^2=\{(x,y,z)/-y+z=0\}$$

Escogemos $\bar{u}_2=(0,1,1)$ y $\bar{u}_1=(a-1,0,0)$.

Ahora completamos la base con un vector $\bar{v}_1\in Ker(A-(a+1)Id)$:

$$A-(a+1)Id=\begin{pmatrix}-a & -1 & 0\\ 0 & -a & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix},$$

luego

$$Ker(A-(a+1)Id)=\{(x,y,z)/y=0,\ x=z\}.$$

Escogemos $\bar{v}_1=(1,0,1)$.

La matriz P queda

$$P=\begin{pmatrix}a-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(c) *Cuando $a=-1$, calcular A^n para cualquier $n\in\mathbb{N}$.*

Método I: Utilizamos que:

$$J=P^{-1}AP \iff A=PJP^{-1}.$$

con las matrices J y P que hemos obtenido en el apartado anterior:

$$J=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\qquad P=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$A^n=PJ^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & n & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2n+1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Método II: Calculamos las primeras potencias de A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad A^2=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad A^3=\begin{pmatrix}1 & -5 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Parece cumplirse que, en general:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & -2n+1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Lo probamos por inducción:

- Para $n=1$ se cumple:

- Lo suponemos cierto para $n-1$ y lo comprobamos para n:

$$A^n=A^{n-1}A=\begin{pmatrix}1 & -2(n-1)+1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2n+1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 2005)

6.– Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 & a-1 \\ a & 1 & 0 & -a \\ 1+2a & 0 & 2 & 1-2a \\ -1-a & 0 & -1 & a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real, se pide:

a) En función de $a \in \mathbb{R}$, estudiar si A es triangularizable y si es diagonalizable (por semejanza).

b) Para $a = 1$, encontrar una forma de Jordan asociada a A y la correspondiente matriz de paso.

Solución.

(a) Calculamos el polinomio característico

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} -a-\lambda & 0 & -1 & a-1 \\ a & 1-\lambda & 0 & -a \\ 1+2a & 0 & 2-\lambda & 1-2a \\ -1-a & 0 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -a-\lambda & -1 & a-1 \\ 1+2a & 2-\lambda & 1-2a \\ -1-a & -1 & a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & a-1 \\ 2 & 2-\lambda & 1-2a \\ -1-\lambda & -1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 \\ 2 & 2-\lambda & 1-2a \\ -1-\lambda & -1 & a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ -1-\lambda & -1 \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda-\lambda^2) = \lambda(\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

luego, independientemente de a, los autovalores de A son 0 (con multiplicidad algebraica 1) y 1 (con multiplicidad algebraica 3). En particular A siempre será triangularizable: la suma de las multiplicidades algebraicas coincide con el tamaño de la matriz. Para analizar si A es diagonalizable tenemos que calcular las multiplicidades geométricas. Como $\lambda = 0$ es un autovalor simple, su multiplicidad geométrica es necesariamente 1. En cuanto a $\lambda = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} d(1) &= 4 - \operatorname{rg}(A - 1\cdot I) = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -a-1 & 0 & -1 & a-1 \\ a & 0 & 0 & -a \\ 1+2a & 0 & 1 & 1-2a \\ -1-a & 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \\ &= 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 2 & 0 & 1 & 1-2a \\ -2 & 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 1-2a \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Claramente $d(1) = 4 - 1 = 3$ si $a = 0$ y $d(1) = 4 - 2 = 2$ en otro caso. Por lo tanto, la matriz A es diagonalizable (las multiplicidades geométricas suman 4) si y sólo si $a = 0$.

(b) Para $a = 1$ tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de la que, por el apartado anterior, sabemos que es triangularizable no diagonalizable: sus autovalores son $\lambda = 0$ (con multiplicidades $m(0) = d(0) = 1$) y $\lambda = 1$ (con multiplicidades $m(1) = 3,\ d(1) = 2$). La base en la que obtendremos la forma de Jordan J asociada a A (las filas de la matriz de paso P tal que $J = PAP^{-1}$) contendrá un autovector de $\lambda = 0$ y tres vectores obtenidos a partir de $\lambda = 1$, de los cuales dos serán autovectores. El esquema es como sigue:

$\operatorname{Ker}(A - 0\cdot I)$	$\operatorname{Ker}(A - 1\cdot I)$		$\operatorname{Ker}(A - 1\cdot I)^2$
$*$	$*$	$\leftarrow$	$*$
	$*$		

Con la base de Jordan $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ ordenada como en el esquema (leyendo por líneas, de izquierda a derecha) la matriz de Jordan asociada es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{v}_1$ es un autovector de $\lambda = 0$, luego una solución del sistema $A(x, y, z, t)^t = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos por ejemplo $\bar{v}_1 = (1, 0, -1, 1)$.

$\bar{v}_3$ es un vector de $\mathrm{Ker}(A - I)^2$ que no pertenezca a $\mathrm{Ker}(A - I)$; $\bar{v}_2$ se obtiene como $(A - I)\bar{v}_3$, y $\bar{v}_4$ ha de formar una base de $\mathrm{Ker}(A - I)$ junto a $\bar{v}_2$. Las ecuaciones de $\mathrm{Ker}(A - I)$ son

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y las de $\mathrm{Ker}(A - I)^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución del segundo sistema que no lo sea del primero es, por ejemplo, $\bar{v}_3 = (1, 0, -1, 0)$. Así $\bar{v}_2 = (1, 0, -1, 0)(A - I) = (-1, 1, 2, -1)$ y como $\bar{v}_4$ podemos tomar $(0, 1, 0, 0)$, que es un autovector independiente con $\bar{v}_2$. La matriz de paso P queda finalmente

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.– *Sea la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & a \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *Estudiar en función de los valores de a si es triangularizable y/o diagonalizable.*

Calculamos el polinomio característico:

$$det(A - \lambda Id) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1).$$

Por tanto los autovalores son:

- $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $m(\lambda_1) = 3$.

- $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica $m(\lambda_2) = 1$.

Como la suma de ambas multiplicidades coincide con la dimensión de la matriz, ésta es siempre triangularizable por semejanza.

Para ver si además deiagonaliza hay que comprobar si las multiplicidades geométricas coinciden con las algebraicas. Para λ_2 es inmediato, porque:

$$1 \leq d(\lambda_2) \leq m(\lambda_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad d(\lambda_2) = m(\lambda_2).$$

Para el otro autovalor tenemos:

$$d(\lambda_1) = 4 - rango(A - Id) = 4 - rango \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & a \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & a \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que deducimos:

- Si $a = 0$, entonces $d(\lambda_1) = 4 - rango(A - \lambda Id) = 4 - 2 = 2$.

- Si $a \neq 0$, entonces $d(\lambda_1) = 4 - rango(A - \lambda Id) = 4 - 3 = 1$.

En cualquier caso nunca coincide con la multiplicidad algebraica. Por lo que nunca diagonaliza.

b) *Cuando sea posible, calcular la correspondiente matriz diagonal o de Jordan en función del parámetro a.*

Por lo que hemos visto antes.

- Si $a \neq 0$, entonces hay una caja de Jordan dimensión 3 asociada al autovalor 1 y otra de dimensión 1 asociada a -1. La forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Si $a = 0$, entonces hay dos cajas de Jordan cuyas dimensiones suman 3 asociadas al autovalor 1 y otra de dimensión 1 asociada a -1. La forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) *Para $a = 0$ calcular los autovectores de A. Además hallar una matriz inversible P tal que $J = PAP^{-1}$ siendo J la forma de Jordan.*

Los autovectores asociados a 1 cumplen:

$$(A - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quedan las ecuaciones independientes:

$$-4x - 2y = 0, \qquad y = -2x.$$

Por tanto los autovalores asociados a 1 son los del subespacio:

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, -2)\}.$$

Los autovectores asociados a -1 cumplen:

$$(A+Id)\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}-2&-2&0&0\\4&4&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Quedan las ecuaciones independientes:

$$-2x-2y=0, \qquad t=0, \qquad 4z+4t=0.$$

Por tanto los autovalores asociados a -1 son los del subespacio:

$$S_{-1}=\mathcal{L}\{(1,-1,0,0)\}.$$

Para hallar la matriz de paso ya vimos que hay dos cajas de Jordan de dimensiones 1 y 2 asociadas al autvalor 1. Entonces tenemos que encontrar vectores $\bar{u}_2$ y $\bar{v}_1$ encajando en el esquema:

$$\begin{array}{rl} Ker(A-Id) & Ker(A-Id)^2 \\ (A-Id)\bar{u}_2 & \bar{u}_2 \\ \bar{v}_1 & \end{array}$$

con $\bar{v}_1$ y $(A-Id)\bar{u}_2$ independientes.

Tenemos:

$$(A-Id)^2=\begin{pmatrix}-8&-4&0&0\\8&4&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

de manera que:

$$(A-Id)^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff y+2x=0.$$

Tomamos $\bar{u}_2=(0,0,0,1)$, $(A-Id)\bar{u}_2^t=(0,0,-1,2)^t$ y $\bar{v}_1=(1,-2,0,0)$. Por otra parte ya vimos que un autovector asociado a -1 es $(1,-1,0,0)$.

En definitiva la matriz de paso P queda:

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&-2&-1\\-1&0&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}.$$

8.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios reales de grado menor o igual que 2 se considera un endomorfismo $f:\mathcal{P}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Se sabe que:*

i) $f(x^2+1)=x^2$.

ii) El polinomio $1+x+x^2$ es un autovector y no está en el núcleo de f.

iii) La imagen de los polinomios constantes es nula.

iv) El endomorfismo sólo tienes dos autovalores distintos.

Entonces:

a) *Calcular la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Para saber como actúa la apliación f necesitamos conocer la imagen de tres vectores independientes. Sabemos:

- Por (i), $f(x^2+1)=x^2$.

- Por (iii), $f(1)=0$.

- Combinando ambas y teniendo en cuenta que f es lineal:

$$f(x^2)=f(x^2+1-1)=f(x^2+1)-f(1)=x^2.$$

Concluimos que 1 y x^2 son autovectores. El primero asociado al autovalor 0 y el segundo asociado al autovalor 1. Además son los únicos autovalores, ya que en (iv) se afirma que el endomorfismo sólo tiene dos autovalores distintos.

Por último nos dicen que el $1+x+x^2$ es autovector y no está en el núcleo. Entonces necesariamente está asociado a un autovalor no nulo. Y por lo que hemos razonado sólo puede ser el 1. Por tanto:

$$f(1+x+x^2)=1+x+x^2.$$

Ya sabemos como actúa f sobre tres vectores. Pero para hallar la matriz asociada necesitamos saber las imágenes de los elementos de la base canónica. Pero ahora es fácil:

$$\begin{aligned} &f(1)=0\\ &f(x)=f(1+x+x^2)-f(x^2+1)=1+x+x^2-x^2=1+x\,.\\ &f(x^2)=x^2 \end{aligned}$$

Concluimos que la matriz asociada pedida es:

$$F_{CC}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

b) *Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la imagen respecto a la base:*

$$B=\{1,1+x,1+x+x^2\}$$

La imagen en la base canónica está generada por las columnas de la matriz asociada:

$$Im(f)=\mathcal{L}\{(1,1,0)_C,(0,0,1)_C\}.$$

Son claramente independientes. Las cambiamos de base:

$$M_{BC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad M_{BC}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},$$

donde

$$M_{BC}=M_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Entonces las ecuaciones paramétricas en la base B son:

$$x'=0,\qquad y'=\lambda-\mu,\qquad z'=\mu.$$

Las implícitas las hallamos eliminando paramétros. Sabemos que tienen que quedar $dim(P_2(\mathbb{R}))-$ número de parámetros$=1$ ecuación independiente. Resulta simplemente:

$$x'=0.$$

9.– *Sea* $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Se sabe que* A^2 *es semejante a* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $traza(A) = 1$.

a) Hallar los autovalores de A.

Observamos que si λ es autovalor de A entonces λ^2 es autovalor de A^2 ya que:

$$Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad A^2u = A(Au) = A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda^2 u.$$

Por tanto los posibles autovaloes de A son las raíces cuadradadas de los autovalores de A^2 que claramente son 1 y 4. Los posibles autovalores son entonces:

$$1, -1, 2, -2.$$

Además la traza de la matriz coincide con la suma de sus autovalores. Concluimos que éstos son 2 y -1.

b) *¿Es A diagonalizable por semejanza?.*

Si lo es porque tiene todos sus autovalores reales y además con multiplicidad algebraica uno (con lo que necesariamente coincide con la multiplicidad geométrica).

11.– *Sea A una matriz cuadrada. Supongamos que* $(\lambda - 2)^{12}$ *es el polinomio característico de A:*

$$m.geométrica(2) = 6, \quad rango((A - 2Id)^2) = 2, \quad dim(ker((A - 2Id)^3) = 11.$$

¿Es A triangularizable por semejanza? En caso afirmativo calcular una forma de Jordan semejante a A.

Como $(\lambda - 2)^{12}$ es el polinomio característico y el grado del mismo coincide con la dimensión de la matriz, sabemos que $A \in M_{12\times 12}$. Además tiene un úncio autovalor con multiplicidad algebraica 12 luego triangulariza.

Como la multiplicidad geométrica es 6 hay seis cajas de Jordan.

Además:

i) $dim(ker(A - 2Id)^2) - dim(ker(A - Id)) = 12 - 2 - (12 - 6) = 4$ luego hay cuatro cajas de tamaño mayor o igual que 2.

ii) $dim(ker(A - 2Id)^3) - dim(ker(A - Id)^2) = 11 - (12 - 2) = 1$ luego hay una caja de tamaño mayor o igual que 3.

En total tenemos entonces 2 cajas de tamaño 1, 3 cajas de tamaño 2 y 1 caja de tamaño mayor o igual que 3. Como en total todas ellas tienen dimensión 12 la última necesariamente es de tamaño:

$$12 - (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = 4.$$

Por tanto una forma de Jordan semejante a A es:

$$\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}.$$

11.– *Encontrar una matriz A que cumpla:*

(1) $\dim(\mathrm{Ker}A) = 1$

(2) $\lambda = 1$ *es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 4.*

(3) $\lambda = 2$ *es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 3.*

(4) $\mathrm{rg}(A - I) = 6$, $\mathrm{rg}(A - I)^2 = 4$

(5) $\mathrm{rg}(A - 2I) = 7$, $\mathrm{rg}(A - 2I)^3 = 5$

Buscaremos una forma de Jordan de dimensión n que cumpla estas condiciones. Interpretemos cada una de ellas:

- La primera nos dice que el autovalor 0 tiene multiplicidad geométrica $dim(Ker(A - 0 \cdot I)) = 1$. Por tanto la algebraica es al menos 1.

- La segunda y tercera, nos da directamente la multiplicidad algebraica de los autovalores 1 y 2.

De estas tres conidicones deducimos que la dimensión de la matriz ha de ser como mínimo 8, es decir, $n \geq 1 + 3 + 4 = 8$.

Ahora, para el autovalor 1 tenemos:

$$rg(A - I) = 6 \quad \Rightarrow \quad dim(ker(A - I)) = n - 6 \quad \Rightarrow \quad dimV_1 = n - 6 \text{ (n}^o \text{ de cajas de Jordan)}$$
$$rg(A - I)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad dim(ker(A - I)^2) = n - 4 \quad \Rightarrow \quad dimV_2 = n - 4$$

Como $dim(V_i)$ $\leq$multiplicidad algebraica$= 4$. Deducimos que $n \leq 8$ y por tanto n es exactamente 8. Ahora vemos que tenemos la siguiente configuración para el autovalor 1 :

$$\begin{matrix} * & * \\ * & * \end{matrix}$$

es decir, dos cajas de Jordan de dimensión 2.

Ahora, para el autovalor 2 tenemos:

$$rg(A - 2I) = 7 \quad \Rightarrow \quad dim(ker(A - 2I)) = 8 - 7 = 1 \quad \Rightarrow \quad dimV_1 = 1 \text{ (n}^o \text{ de cajas de Jordan)}$$
$$rg(A - 2I)^3 = 5 \quad \Rightarrow \quad dim(ker(A - 2I)^3) = 8 - 5 = 3 \quad \Rightarrow \quad dimV_3 = 3$$

Ahora la única posibilidad es una única caja de Jordan de dimensión la multiplicidad algebraica (es decir 3)

Así la matriz pedida puede ser:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Examen final, septiembre 2003)

12.– *Encontrar una matriz A,* 7×7 *y de elementos reales, tal que*

$$rango(A) = 4, \quad A^4 = \Omega, \quad A^3 \neq \Omega.$$

Lo más sencillo es construir A de manera que sea una determinada forma de Jordan. Veamos la información que nos dan:

- $rango(A) = 4$ significa que $dim(ker(A - 0 \cdot I)) = 7 - 4 = 3$ y por tanto hay tres cajas de Jordan relativas al autovalor 0.

- $A^4 = \Omega$ significa que $dim(ker(A - 0 \cdot I)^4) = 7$. Significa que el autovalor 0 tiene multiplicidad al menos 7. Como la matriz es 7-dimensional. Tiene multiplicidad exactamente 7.

- $A^3 \neq \Omega$ significa que $dim(ker(A - 0 \cdot I)^3) \leq 6$.

Deducimos que hay tres cajas de Jordan relativas al autovalor 0. Además de los dos últimos factores, se deduce que una de ellas tiene dimensión 4. La única posibilidad es por tanto es la configuración:

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & & \\ * & & & \end{matrix}$$

Es decir cajas de dimensiones 4, 2 y 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Primer parcial, febrero 2000)

13.– *Encontrar una matriz real A de dimensión 6 que verifique las condiciones siguientes:*

$$\dim \mathrm{Ker} A = 2, \quad \dim \mathrm{Ker} A^2 = 4, \quad \mathrm{rg}(A - I) = 4.$$

Buscaremos A como matriz de Jordan. Interpretemos las condiciones que se le piden:

- $\dim \mathrm{Ker} A = 2$, quiere decir que hay dos cajas de Jorfan relativas al autovalor 0.

- $\dim \mathrm{Ker} A^2 = 4$, quiere decir que la caja relativa al autovalor 0 al menos tiene dimensión 4. En concreto al menos hay dos cajas de dimensión 2.

- $\mathrm{rg}(A - I) = 4$, quiere decir que $dim(Ker(A - I)) = 6 - 4 = 2$. Y por tanto hay dos cajas relativas al autovalor 1.

Combinando estos factores, concluimos que A puede tomarse de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

14.– *Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable. Supongamos que su polinomio característico es:*

$$p(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d.$$

Probar que:

$$aA^3 + bA^2 + cA + dId = \Omega.$$

Por ser diagonalizable existe una matriz P inversible tal que:

$$D = PAP^{-1} \quad \text{o equivalentemente} \quad A = P^{-1}DP,$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los autovalores de A. Estos anulan el polinomio característico:

$$p(\lambda_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\lambda_i^3 + b\lambda_i^2 + c\lambda_i + d = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Entonces utilizamos que:

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Por tanto:

$$aA^3 + bA^2 + cA + dId = aPD^3P^{-1} + bPD^2P^{-1} + cPDP^{-1} + dId = P(aD^3 + bD^2 + cD + dId)P^{-1}.$$

La potencia de una matriz diagonal es fácil de calcuar:

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$aD^3 + bD^2 + cD + d = \begin{pmatrix} a\lambda_1^3 + b\lambda_1^2 + c\lambda_1 + d & 0 & 0 \\ 0 & a\lambda_2^3 + b\lambda_2^2 + c\lambda_2 + d & 0 \\ 0 & 0 & a\lambda_3^3 + b\lambda_3^2 + c\lambda_3 + d \end{pmatrix} = \Omega.$$

Finalmente:

$$aA^3 + bA^2 + cA + dId = P(aD^3 + bD^2 + cD + dId)P^{-1} = P\Omega P^{-1} = \Omega.$$

(0.75 puntos)

15.– *Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:*

(a) *Sea* $A \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$ *una matriz triangularizable que verifica* $rango((A - Id)^4) + rango((A - Id)^5) = 1$.

De la igualdad se deduce que:

- $rango((A-Id)^4) = 0$ y $rango((A-Id)^5) = 1$, o bien, - $rango((A-Id)^4) = 1$ y $rango((A-Id)^5) = 0$.

Pero $rango((A - Id)^4) = 0$ y $rango((A - Id)^5) = 1$ no puede darse, al aumentar la potencia el rango se mantiene o disminuye. Por tanto la única posibilidad es que:

$$rango(A - Id)^4 = 1, \qquad rango(A - Id)^5 = 0.$$

Inmediatamente deducimos que 1 es autovalor de A, porque en otro caso $|A - Id| \geq 0$, $(A - Id)$ sería no singular y cualquier potencia suya también, luego $rango(A - Id)^4$ tendría que ser 5.

Además si hacemos el esquema para saber la estructura de la correspondiente caja de Jordan tenemos que:

$$dim(ker(A - Id)^5) - dim(ker(A - Id)^4) = rango(A - Id)^4 - rango(A - Id)^5 = 1.$$

Luego al menos tenemos un esquema con las siguientes características:

$$\begin{array}{ccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ * & * & * & * & * \end{array}$$

donde $V_i = ker(A - Id)^i$.

Es decir al menos hay una caja de Jordan relativa al autovalor 1 de dimensión 5. Como esa es la dimensión total de la matriz, deducimos que 1 es su único autovalor. La forma de Jordan asociada es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◯ $Ker(A) \neq \{0\}$.

FALSO. Sabemos que $Ker(A) = 0$ porque el 0 **no** es autovalor.

◯ $rango((A - Id)^3) = 2$.

VERDADERO. Basta tener en cuenta que $rango((J - Id)^3) = 2$.

◯ *A es diagonalizable.*

FALSO. Acabamos de ver que su forma de Jordan no es diagonal.

◯ *Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.*

FALSO.

(b) *Sean A y B dos matrices cuadradas reales semejantes y λ un autovalor de A. Entonces:*

◯ *Pueden tener distinto determinante.*

FALSO. Dos matrices semejantes siempre tienen el mismo determinante. Por ser semejantes, $A = P^{-1}BP$, luego:

$$|A| = |P^{-1}BP| = |P^{-1}||B||P| = |P|^{-1}|B||P| = |B|.$$

◯ $(A - \lambda Id)^n = (B - \lambda Id)^n$.

FALSO. Por ejemplo tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ambas matrices son semejantes y tienen al 0 por autovalor, pero:

$$(A - 0 \cdot Id)^1 = A \neq B = (B - 0 \cdot Id)^1.$$

Observación: Lo que si es cierto, es que si A y B son semejantes y λ es un autovalor, entonces:

$$rango((A - \lambda Id)^n) = rango((B - \lambda Id)^n).$$

◯ *Si $A^n = \Omega$, entonces $B^n = \Omega$.*

VERDADERO. Como A y B son semejantes, $A = P^{-1}BP$. Entonces si $A = \Omega$:

$$B = PAP^{-1} \quad \Rightarrow \quad B^n = PA^nP^{-1} = P\Omega P^{-1} = \Omega.$$

◯ $AB = BA$.

FALSO. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, son semejantes pero $AB \neq BA$.

(c) *Dada una matriz real A, de dimensión 9×9, triangularizable, se sabe que su único autovalor es el 0 y que $A^4 \neq \Omega$. Entonces:*

Si llamamos $V_i = Ker(A^i)$. Como $A^4 \neq \Omega$, tenemos $dim(V_4) \leq 8 < 9$. Por tanto:

$$dim(V_1) < dim(V_2) < dim(V_3) < dim(V_4) \leq 8 \qquad \Rightarrow \quad dim(V_1) \leq 5$$

Otra forma de razonar, puede ser la siguiente. Si $dim(V_4) < 9$ quierde decir que al menos hay una caja de Jordan de dimensión 5. Por tanto a lo sumo puede haber 5 cajas de Jordan: 1 de dimensión 5 y 4 de dimensión 1.

◯ *A es diagonalizable.*

FALSO. De hecho si fuese diagonalizable A sería la matriz Ω y tendríamos $A^4 = \Omega$.

◯ *la multiplicidad geométrica del* 0 *es mayor o igual que* 5.

FALSO. Ejemplo donde la multiplicidad geométrica es 1 porque sólo hay una caja de Jordan y $A^4 \neq \Omega$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◯ *la multiplicidad geométrica del* 0 *siempre es igual a* 5.

FALSO. Vale el mismo ejemplo de antes.

◯ *la multiplicidad geométrica del* 0 *es menor o igual que* 5.

VERDADERO. Lo hemos razonado al principio.

(Primer parcial, enero 2004)

(d) *Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ una base de un espacio vectorial real V. De un enfomorfismo $f : V \longrightarrow V$ se conoce su matriz asociada respecto de la base B:*

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◯ *El vector $\bar{u}_1$ es un autovector asociado a f.*

FALSO. La imagen de $\bar{u}_1$ es $0\bar{u}_1 + 0\bar{u}_2 + 1\bar{u}_3 = \bar{u}_3$. Luego no es autovector.

◯ *El vector $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$ es un autovector asociado a f.*

VERDADERO. La imagen de $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$ es con respecto a la base B:

$$F_{BB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego si es autovector.

◯ *El endomorfismo es diagonalizable.*

FALSO. El polinomio característico es:

$$|F_{BB} - \lambda Id| = (1 - \lambda)(1 + \lambda + \lambda^2)$$

y sólo tiene una solución real.

◯ *Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.*

FALSO.

(e) *Sean* $B_1 = \{\bar{u}, \bar{v}\}$ *y* $B_2 = \{\bar{v}, \bar{u}\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$. *Sea* f *un endomorfismo diagonalizable de* $\mathbb{R}^2$. *Se sabe que una de las siguientes* 4 *matrices es la matriz* $F_{B_2B_1}$ *asociada a* f *respecto a las bases* B_1 *y* B_2. *¿Cuál de ellas?.*

○ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. ○ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. ○ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. ○ $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para poder estudiar la diagonalización de F necesitamos la matriz asociada respecto a UNA SOLA base. La matriz de paso de B_2 a B_1 es:

$$M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$F_{B_1B_1} = M_{B_1B_2} F_{B_2B_1}.$$

Haciendo esta operación para las cuatro matrices quedan:

○ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ○ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ○ $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. ○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ahora claramente la CUARTA matriz es diagonalizable por que es triangular y los dos autovalores que aparecen en la diagonal son distintos.

Puede verse además que la primera y la tercera no tienen autovalores reales, luego no diagonalizan.

Por último la segunda tiene al 1 como su único autovalor, pero con multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1. Por tanto no diagonaliza.

(f) *Dada una matriz* A *que cumpla:*

(1) $\dim(\mathrm{Ker} A) = 1$

(2) $\lambda = 1$ *es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 4.*

(3) $\lambda = 2$ *es un autovalor cuya multiplicidad algebraica es 3.*

(4) $\mathrm{rg}(A - I) = 6$, $\mathrm{rg}(A - I)^2 = 4$, $\mathrm{rg}(A - 2I) = 7$

Sea n la dimensión de la matriz. Entonces siempre se cumple:

$$n - rg(A - I)^k \leq \text{multiplicidad algebraica de 1.}$$

En particular para $k = 2$, tenemos $n - 4 \leq 4$ y $n \leq 8$. Por otra parte 0, 1 y 2 son autovalores con multiplicidades 1, 4 y 3 respectivamente. Por tanto $n \geq 1 + 4 + 3 = 8$. Deducimos que $n = 8$.

Ahora si $rg(A - 2I) = 7$ entonces la multiplicidad geométrica de 2 es $8 - 7 = 1$ y hay una única caja de Jordan asociada al autovalor 2. Como consecuencia de esto:

$$rg(A - 2I)^2 = 6 \text{ y } rg(A - 2I)^3 = 5.$$

○ Puede ser que $\mathrm{rg}(A - 2I)^2 = 5$

FALSO.

○ Tiene que ser que $\mathrm{rg}(A - 2I)^3 = 5$

VEDADERO.

○ La matriz A es 7x7

FALSO.

○ Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta

FALSO.

(g) *Si A es un matriz real $n \times n$, μ un escalar real y λ es un autovalor de A, entonces*

◯ $\dfrac{\lambda}{\mu}$ *es autovalor de μA.*

FALSO. Por ejemplo 1 es autovalor de Id pero $1/2$ no es autovalor de $2Id$.

◯ $\mu\lambda$ *es autovalor de μA.*

VERDADERO. Si λ es autovalor de A, entonces existe un vector u no nulo con:

$$Au = \lambda u.$$

Por tanto:

$$(\mu A)u = (\mu\lambda)u$$

y vemos que $\mu\lambda$ es autovalor de μA.

◯ $\dfrac{\mu}{\lambda}$ *es autovalor de μA.*

FALSO. Por ejemplo si $\mu = 1$ y $\lambda = 2$, λ es autovalor de $A = 2Id$ pero $\dfrac{1}{2}$ no es autovalor de $1 \cdot A$.

◯ *Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.*

FALSO.

ÁLGEBRA

Solución a los problemas adicionales

Endomorfismos

(Curso 2009–2010)

VI.– *Consideramos el polinomio* $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$.

(a) *¿Cuál es el mayor número de matrices que puede haber cuyo polinomio característico sea p y no sean semejantes dos a dos?.*

(b) *Resolver la misma cuestión para el polinomio* $q(\lambda) = -(\lambda-1)^3$.

(a) Cualquier matriz que tenga a $p(\lambda)$ como polinomio característico es triangularizable, y en concreto tiene dos autovalores

$$\lambda_1 = 0 \text{ con multiplicidad algebraica 1}$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ con multiplicidad algebraica 2}$$

Por tanto dicha matriz será equivalente a una forma de Jordan con estos autovalores. Por tanto lo que se nos pregunta es cuantas formas de Jordan hay no semejantes entre si, con los autovalores y multiplicidades anteriores. Es claro que tenemos dos posibilidades:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{ó} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

(b) Ahora el polinomio q tiene a 1 como una única raíz con multiplicidad 3. Por tanto hay un único autovalor con multiplicidad algebraica 3. Razonando como en el apartado anterior vemos que hay 3 posibiles clases de matrices no semejantes dos a dos:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{ó} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{ó} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

VII.– *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcular sus autovalores y autovectores.*

Los autovalores son las raíces del polinomio característico. Este es:

$$det(A - \lambda Id) = (1-\lambda)^3(2-\lambda)^2.$$

Las raíces son por tanto:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

$\lambda_2 = 2$ con multiplicdidad algebracia 2.

Los autovectores asociados a cada autovalor λ son los vectores de los subespacios $ker(A - \lambda Id)$.

Para $\lambda_1 = 1$ tenemos:

$$ker(A - Id) = \{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{R}^5 | (A - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quedan las ecuaciones independientes:

$$y - z - u = 0, \qquad -z = 0, \qquad -z - t + u = 0.$$

Por tanto el espacio de vectores característico tiene dimensión $5 - 3 = 2$. Una base del mismo vendrá dada por dos autovectores independientes cumpliendo estas ecuaciones:

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 1)\}$$

Para $\lambda_1 = 2$ tenemos:

$$ker(A - 2Id) = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 | (A - 2Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y obtenemos las ecuaciones independientes:

$$-x + y - z - u = 0, \qquad -z - u = 0, \qquad -z = 0, \quad -z - t = 0.$$

Por tanto el espacio de vectores característicos tiene dimensión $5 - 4 = 1$. Una base del mismo vendrá dada por un autovector cumpliendo estas ecuaciones

$$\{(1, 1, 0, 0, 0)\}$$

(b) *¿Es diagonalizable y/o triangularizable por semejanza?.*

Es triangularizable porque la suma de las multiplicidades algebraicas coincide con la dimensión de la matriz. No es diagonalizable, porque las multiplicidades geométricas no coinciden con las algebraicas:

$m.g.(1) = dim(ker(A - Id)) = 2 \neq 3 = m.a.(1)$

$m.g.(2) = dim(ker(A - 2Id)) = 1 \neq 2 = m.a.(2)$

(c) *Calcular, si es posible, una forma de Jordan J y una matriz inversible P tal que $J = PAP^{-1}$.*

Para cada autovalor, la multiplicidad algebraica nos indica la dimensión total de las cajas de Jordan asociadas al mismo; la geométrica el número de cajas de Jordan.

Para $\lambda_1 = 1$ tenemos $m.a(1) = 3$ y $m.g(1) = 2$. Por tanto la única posibilidad es dos cajas de Jordan de tamaños respectivamente 2 y 1.

Para $\lambda_2 = 2$ tenemos $m.a(2) = 2$ y $m.g(2) = 1$. Por tanto la única posibilidad es una caja de Jordan de tamaño 2.

Una forma de Jordan semejante a la matriz dada será por tanto:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos la matriz de paso P. Comenzamos con los vectores relativos al autovalor 1. Buscamos vectores u_2, v_1 según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{cc} Ker(A-Id) & Ker(A-Id)^2 \\ u_2(A-Id) & u_2 \\ v_1 & \end{array}$$

con $u_2(A-Id) \neq 0$ y v_1 linealmente independiente con él. Los vectores de $Ker(A-Id)^2$ son:

$$(A-Id)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo las ecuaciones:

$$y + t - 2u = 0, \quad -t + u = 0.$$

Escogemos el vector cumpliendo esas condiciones $u_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$ de manera que $(A - Id)u_2^t = (-1, -1, 0, -1, -1)^t$.

El vector v_1 está en el $ker(A - Id)$, que ya hemos calculado previamente. Tomamos $v_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$.

Ahora trabajamos con el autovalor 2. Buscamos un vector w_2 según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{cc} Ker(A-2Id) & Ker(A-2Id)^2 \\ (A-2Id)w_2 & w_2 \end{array}$$

con $(A - 2Id)w_2 \neq 0$. Los vectores de $Ker(A - 2Id)^2$ son:

$$(A-2Id)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo las ecuaciones:

$$x - y + 2z + t = 0, \quad 2z + t = 0, \quad z = 0.$$

Escogemos el vector cumpliendo esas condiciones $w_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$ de manera que $(A - 2Id)w_2 = (-1, -1, 0, 0, 0)$.

En definitiva la matriz de paso queda:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VIII.– *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. *Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

i) *A puede tener dos autovalores de distinto signo.*

VERDADERO. El polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda Id) = (1 - \lambda)^2 - a^2 = (1 + a - \lambda)(1 - a - \lambda).$$

Por tanto sus autovalores son $1 + a$ y $1 - a$. Pueden tener distintos signo. Basta tomar, por ejemplo, $a = 2$.

ii) 2 *y* 3 *pueden ser los autovalores de* A.

FALSO. La suma de los autovalores de la matriz coincide con su traza. En este caso la traza de la matriz es 2 y $2+3=5$. Luego no es posible que sean los autovalores de A.

iii) A *siempre es congruente con la identidad.*

FALSO. La congruencia conserva el signo del determinante. Si A siempre fuese congruente con la identidad el signo de su determinante siempre debería de ser positivo. Pero, por ejemplo para $a=2$ el determinante es -3.

IX.– *Sea* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *el endomorfismo dado por*

$$f(x,y,z)=((\alpha-1)x+\alpha y+(\alpha-2)z,\ x+y+z,\ x-\alpha y+2z)$$

(a) *Hallar los valores de* α *para los que* f *es un endomorfismo diagonalizable; para esos valores, encontrar una base de vectores característicos.*

La matriz asociada a f respecto a la base canónica es:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha-1 & \alpha & \alpha-2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -\alpha & 2\end{pmatrix}$$

Calculamos los autovalores:

$$\begin{aligned}det(A-\lambda I)&=\begin{vmatrix}\alpha-1-\lambda & \alpha & \alpha-2\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & -\alpha & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & \alpha & \alpha-2\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ -1+\lambda & -\alpha & 2-\lambda\end{vmatrix}=\\ &=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha-2\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ -1 & -\alpha & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & \alpha & \alpha-2\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & \alpha-\lambda\end{vmatrix}=\\ &=(1-\lambda)^2(\alpha-\lambda)\end{aligned}$$

Para que sea diagonalizable se tiene que cumplir:

- $\alpha=1$ y la multiplicidad geométrica de $\lambda=1$ es 3, o bien,

- $\alpha\neq 1$ y la multiplicidad geométrica de $\lambda=1$ es 2.

Pero:

$$A-I=\begin{pmatrix}\alpha-2 & \alpha & \alpha-2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -\alpha & 1\end{pmatrix}$$

Vemos que tiene rango 2 si $\alpha\neq 0$ y rango 1 si $\alpha=0$.

Por tanto:

- Si $\alpha\neq 0$, la multiplicidad geométrica es $dim(ker(A-I))=3-rango(A-I)=1$ y no es diagonalizable.

- Si $\alpha=0$, y la multiplicidad geométrica es $dim(ker(A-I))=3-rango(A-I)=2$ y es diagonalizable.

Calculemos los autovectores cuando $\alpha=0$:

- Asociados a 1:

$$(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad x+z=0$$

Luego:

$$S_1=\mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$$

- Asociados al 0:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-x-2z=0\\x+y+z=0\end{cases}$$

Luego:

$$S_0=\mathcal{L}\{(2,-1,-1)\}$$

Una base de autovectores es:

$$\{(1,0,-1),(0,1,0),(2,-1,-1)\}$$

.

(b) *Hallar el valor de α para que f tenga un autovalor triple. Encontrar la forma canónica de Jordan y una base asociada.*

Vimos que $\lambda=1$ es un autovalor triple si $\alpha=1$. Además en ese caso la multiplicidad geométrica vimos que era 1. Por tanto hay una única caja de Jordan:

$$J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Para calcular una base asociada tomamos un vector $\vec{v}_3\in ker(A-I)^3$ que no esté en $ker(A-I)^2$. Tenemos:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

Observamos que $ker(A-I)^3=\mathbb{R}^3$. Podemos tomar entonces $\vec{v}_3=(1,0,0)$. Ahora la base está formada por los vectores:

$$\{(A-I)^2\vec{v}_3,(A-I)\vec{v}_3,\vec{v}_3\}=\{(1,0,-1),(-1,1,1),(1,0,0)\}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

X.– *Sea un espacio vectorial real V y una base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\vec{e}_3\}$. De un endomorfismo $t:V\to V$ se sabe que:*

El núcleo está generado por el vector $(2,1,0)$.

El vector $(1,1,1)$ pertenece a la imagen.

El vector $(3,2,1)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda=2$.

La proyección del vector $t(0,0,1)$ sobre el subespacio vectorial $\mathcal{L}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ paralelamente a $\mathcal{L}\{(0,1,0)\}$ es $(-1,-2,-1)$.

Se pide:

(a) *Hallar una base de la imagen de t.*

Sabemos que el núcleo está generado por un vector luego tiene dimensión 1. Por tanto la dimensión de la imagen es:

$$dim(Im(t))=3-1=2$$

Ahora $(1,1,1)\in Im(t)$ y $(3,2,1)$ por ser autovector también está en la imagen. Dado que ambos vectores son independientes tenemos la base pedida:

$$Im(t)=\{(1,1,1),(3,2,1)\}$$

(b) *Hallar los autovalores y los autovectores de t.*

Sabemos que hay al menos dos autovalores $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$. Necesariamente el polinomio característico tiene que tener otra solución real. Además la suma de los autovalores coincide con la traza de la matriz del endomorfismo en cualquier base. Por tanto $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -7 + 10 - 1 = 2$ y deducimos que $\lambda_3 = 0$. En definitiva:

- Autovalores:

$$\lambda_1 = 0 \text{ con multiplicidad algebraica 2.}$$
$$\lambda_2 = 2 \text{ con multiplicidad algebraica 1.}$$

- Autovectores:

$$S_0 = \mathcal{L}\{(2,1,0)\}.$$
$$S_2 = \mathcal{L}\{(3,2,1)\}.$$

(c) *Hallar la matriz de t en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \vec{e}_3\}$.*

Sabemos que el vector $(2,1,0)$ va al cero.

Sabemos que la imagen del vector $(3,2,1)$ es $(6,4,2)$.

Calculemos la imagen del $(0,0,1)$. Sabemos que $t(0,0,1)$ es de la forma:

$$t(0,0,1) = \lambda(0,1,0) + (-1,-2,-1)$$

Por otra parte está en la imagen de la cual conocemos una base. Se verifica:

$$\lambda(0,1,0) + (-1,-2,-1) = \alpha(1,1,1) + \beta(3,2,1)$$

Resolviendo el sistema queda:

$$\lambda = 1; \quad \alpha = -1; \quad \beta = 0$$

Por tanto $t(0,0,1) = (-1,-1,-1)$.

Deducimos que la matriz de t respecto a la base $\{(2,1,0),(3,2,1),(0,0,1)\}$ en el primer espacio y canónica en el segundo es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de base. Multiplicando por la inversa de la matriz de paso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 14 & -1 \\ -5 & 10 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) *Hallar una matriz de Jordan asociada a t, indicando la base en la que está expresada.*

Teniendo en cuenta que $\lambda_1 = 0$ tiene multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1 y que $\lambda_2 = 2$ tiene multiplicidad algebraica 1, una forma de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular la base correspondiente resta escoger un vector $\bar{v}_2 \in ker(A - 0 \cdot Id)^2$ que no esté en $ker(A)$. Pero:

$$A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -18 & -36 & -6 \\ -12 & 24 & -9 \\ -6 & 12 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 3x - 6y + z = 0$$

Podemos tomar $\bar{v}_2 = (1,0,-3)$. Ahora la base en la que obtenemos la forma de Jordan es:

$$\{A\bar{v}_2, (1,0,-3), (3,2,1)\} = \{(-4,-2,0), (1,0,-3), (3,2,1)\}$$

(Examen final, junio 2004)

XI.– *Sea $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo no diagonalizable tal que $t(2,3,4) = (6,3,6)$, los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,1)$ son autovectores y la traza de la matriz asociada a t en la base canónica es 5. Calcular la matriz asociada a t en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.*

Sabemos como actúa t sobre el vector $(2,3,4)$ y que $(1,0,0)$ y $(0,1,1)$ son autovectores. Por tanto primero escribiremos la matriz de t en la base:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,1),(2,3,4)\}$$

Sabemos que:

$t(1,0,0) = a(1,0,0)$ siendo a el autovalor asociado

$t(0,1,1) = b(0,1,1)$ siendo b el autovalor asociado

$t(2,3,4) = (6,3,6)$

Necesitamos escribir el vector $(6,3,6)$ en la base B. Para ello utilizamos la matriz de cambio de la canónica a B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$(6,3,6) = 0(1,0,0) - 6(0,1,1) + 3(2,3,4)$$

la matriz del endomorfismo T en la base B es:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Debido a que la traza del endomorfismo no depende de la base sabemos que $a + b + 3 = 5$, es decir , $a + b = 2$. Además como la matriz no puede ser diagonalizable y sus autovalores son $a, b, 3$, debe de aparecer un autovalor doble λ. Las posibilidades son $a = b = 1$, $a = 3$ ó $b = 3$. Pero en los dos primeros casos la multiplicidad geométrica del autovalor también es 2 por lo que la matriz si sería diagonalizable. La única posibilidad es por tanto $b = 3$ y $a = -1$.

La matriz de T en la base B es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y haciendo el cambio de base la obtenemos en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 8 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 2003)

XII.– *Sea $\mathcal{P}_2(x)$ el espacio vectorial de polinomios en x de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Consideramos la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_2(x) \longrightarrow \mathcal{P}_2(x); \qquad f(p(x)) = p(x) - p'(x)$$

Se pide:

(a) *Probar que es un endomorfismo.*

Un endomorfismo es una aplcicación lineal dentro del mismo espacio vectorial. En este caso únicamente hay que verificar que f es lineal.

Sean $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(x)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ hay que comprobar que

$$f(\lambda p(x) + \mu q(x)) = \lambda f(p(x)) + \mu f(q(x)).$$

Pero:

$$\begin{aligned} f(\lambda p(x) + \mu q(x)) &= (\lambda p(x) + \mu q(x)) - (\lambda p(x) + \mu q(x))' = \\ &= \lambda p(x) + \mu q(x) - \lambda p'(x) - \mu q'(x) = \\ &= \lambda(p(x) - p'(x)) + \mu(q(x) - q'(x)) = \lambda f(p(x)) + \mu f(q(x)) \end{aligned}$$

(b) *Escribir la matriz asociada a f con respecto a la base canónica de $\mathcal{P}_2(x)$.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(x)$ está formada por los polinomios $\{1, x, x^2\}$. Calculamos sus imágenes por f, y escribimos sus coordenadas en dicha base

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 1 - 0 = 1 & \equiv & (1,0,0) \\ x & \longrightarrow & x - 1 & \equiv & (-1,1,0) \\ x^2 & \longrightarrow & x^2 - 2x & \equiv & (0,-2,1) \end{array}$$

Por tanto la matriz pedida es:

$$F_{CC} = F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) *Calcular sus autovalores y sus autovectores.*

Para calcular los autovalores primero hallamos el polinomio característico:

$$p_F(\lambda) = det(F - \lambda I) = (1 - \lambda)^3$$

Deducimos que hay un único autovalor $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

Calculemos su espacio de autovectores asociado. Denotamos por (a, b, c) a las coordenadaas de un polinomio en la base canónica:

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1} =& \{(a,b,c) \in \mathcal{P}_2(x) | \, (F - Id) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \\ =& \{(a,b,c) \in \mathcal{P}_2(x) | - b = 0; \quad -2c = 0\} = \\ =& \mathcal{L}\{(1,0,0)\} \end{aligned}$$

(d) *Si f es triangularizable, calcular su forma de Jordan y la base en la que se expresa.*

Observamos que f es triangularizable, por que la multiplicidad algebraica del único autovalor coincide con la dimensión del espacio sobre el cual trabajamos. Además la dimensión geométrica de dicho autovalor hemos visto que es $dim(S_{\lambda_1}) = 1$. Por tanto hay una única caja de Jordan asociada al autovalor. La forma de Jordan será:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caclulemos la base en la que se f tiene a J por matriz asociada. Llamamos $V_i = ker(F - \lambda I)^i$. Tenemos

$$V_1 \subset V_2 \subset V_3$$

Para formar la base escogeremos un vector $\bar{v}_3 \in V_3$ que no esté en V_2. De esta forma la base buscada vendrá dada por:

$$\{(F - I)^2 \bar{v}_3, (F - I)\bar{v}_3, \bar{v}_3\}$$

Se tiene:

$$(F-I)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\qquad (F-I)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\qquad (F-I)^3=\Omega$$

Podemos tomar entonces $\bar{v}_3=(0,0,1)$ y la base pedida será:

$$\{(2,0,0),(0,-2,0),(0,0,1)\}$$

o expresada como polinomios:

$$\{2,-2x,x^2\}$$

(e) *Describir, si es posible, la aplicación inversa de f.*

La matriz de F en la base canónica tiene rango 3, luego f es inversible. Para describir la aplicación inversa basta dar su matriz asociada con respecto a una base. La matriz asociada a $g=f^{-1}$ con respecto a las bases canónicas es la inversa de la matriz de f, es decir:

$$G_{CC}=F_{CC}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

XIII.– *Analizar* **razonadamente** *la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

c) *Si $\lambda=1$ y $\mu=-1$ son los autovalores de una matriz simétrica 2x2, entonces (1,1) y (1,-1) no pueden ser los autovectores respectivos.*

Solución: Es FALSO. Tomando

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

se construye

$$A=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

que es una matriz que verifica todo lo que se le pide. Por otra parte, razonando más fino se puede probar que en general esto siempre es posible cuando los vectores suministrados son ortogonales y los autovalores son distintos entre sí.

d) *Una matriz 3x3 que tiene al cero como autovalor nunca es invertible.*

Solución: Es VERDADERO. Basta pensar que la forma de Jordan (diagonal o triangular) asociada tendría en su diagonal un cero, por lo que sería singular y por tanto también la matriz de partida. Por otra parte, si el cero es autovalor, y si denotamos por A a la matriz, se sabe que

$$0=det(A-0I)=det(A),$$

por lo que A no puede ser invertible.

XIV.– *Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $p(\lambda)=\lambda^2-1$. Probar que $A^2-Id=\Omega$.*

Si el polinomio característico es λ^2-1, hay dos autovalores reales 1 y -1, con multiplicidad algebraica uno. Por tanto la matriz diagonaliza, es decir, existen una matriz de paso P tal que:

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}P.$$

Pero entonces:

$$A^2=P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^2P=P^{-1}IdP=P^{-1}P=Id,$$

luego

$$A^2-Id=\Omega.$$

XV.– *Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:*

(a) *Dada la matriz real*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$|A - \lambda I| = (2 - \lambda)(\alpha + 1 - \lambda)(\alpha - 1 - \lambda)$$

Entonces:

◯ *Si $\alpha = 1$ hay dos autovalores $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad algebraica 1. Pero rango$(A - 2I) = 2$ por tanto la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2$ es $3 - 2 = 1 \neq 2$ y la matriz NO es DIAGONALIZABLE.*

◯ *Si $\alpha = 3$ hay dos autovalores $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 4$ con multiplicidad algebraica 1. Pero rango$(A - 2I) = 1$ por tanto la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2$ es $3 - 1 = 2$ y la matriz ES DIAGONALIZABLE.*

◯ *Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 3$, los tres autovalores son diferentes y la matriz es DIAGONALIZABLE.*

Por tanto,

◯ *si $\alpha = 3$, A es diagonalizable por semejanza.*

VERDADERO.

(Primer parcial, febrero 2001)

(b) *Dado un espacio vectorial real V y un endomorfismo $f : V \to V$, tal que* $\mathrm{rg}f = \mathrm{rg}f^2$*, siendo $f^2 = f \circ f$*

Hay que darse cuenta que si $\mathrm{rg}f = \mathrm{rg}f^2$ entonces $Ker(f) = Ker(f^2)$, ya que $dim(Ker(f^i)) = dim(V) - rg(f^i)$ y $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.

◯ $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Img}(f) = \{\bar{0}\}$

VERDADERO. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Img}(f)$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} f(v) = 0 \text{ y } v = f(u) & \Rightarrow & f(f(u)) = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in Ker(f^2) = Ker(f) \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow & f(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = f(u) = 0 \end{array}$$

◯ $f = f^2$

FALSO. Ejemplo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ y entonces $f^2(x) = 4x$.

◯ $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Ker}f$

FALSO. Ejemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$. Entonces $Ker(f) = \{0\}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

◯ $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Im}f$

FALSO. Ejemplo: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Entonces $Ker(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{0\}$.

(Primer parcial, enero 2004)

(c) *En un espacio vectorial real se tienen los endomorfismos $f : V \to V$ y $g : V \to V$.*

◯ $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$

VERDADERO. Si $\bar{v} \in Ker(f)$ entonces $(g \circ f)(\bar{v}) = g(f(\bar{v})) = g(\bar{0}) = \bar{0}$, luego, $\bar{v} \in Ker(g \circ f)$.

◯ $Ker(g) \subset Ker(g \circ f)$

FALSO. Por ejemplo, si tomamos $V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ y $g(x, y) = (0, y)$. Entonces $Ker(g \circ f) = \{0\} \times \mathbb{R}$ y $Ker(g) = \mathbb{R} \times \{0\}$.

◯ $Ker(g \circ f) \subset Ker(f)$

FALSO. Como contraejemplo vale el mismo del apartado anterior.

◯ $Ker(g \circ f) \subset Ker(g)$

FALSO. De nuevo es válido el mismo contraejemplo.

(Primer parcial, enero 2005)

(d) *En un espacio vectorial V se tiene un endomorfismo t*

◯ *dos subespacios característicos no tienen ningún vector en común.*

FALSO. Tienen el vector $\bar{0}$ en común, ya que cualquier subespacio contiene al vector cero. En concreto es el único vector que pertence a dos subespacios característicos distintos, ya que es el único que puede verificar $t(\bar{u}) = \lambda_1 \bar{u} = \lambda_2 \bar{u}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

◯ *puede existir un vector $\bar{x} \neq 0$ asociado a un autovalor tal que $-\bar{x}$ está asociado a un autovalor distinto.*

FALSO. Si $\bar{x}$ esta asociado al autovalor λ significa $t(\bar{x}) = \lambda x$ y por tanto $t(-\bar{x}) = \lambda(-\bar{x})$.

◯ *si sólo existe un autovalor y existe una base de autovectores, cualquier base es de autovectores.*

VERDADERO. Supongamos que tenemos una base $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ de autovectores asociados a un mismo autovalor λ. Cualquier otro vector $\bar{v} \in V$ se puede escribir como $\bar{v} = \mu^1 \bar{u}_1 + \ldots + \mu^n \bar{u}_n$, y por tanto:

$$t(\bar{v}) = \mu^1 t(\bar{u}_1) + \ldots + \mu^n t(\bar{u}_n) = \lambda \mu^1 t(\bar{u}_1) + \ldots + \lambda \mu^n t(\bar{u}_n) = \lambda \bar{v}$$

luego cualquier vector $\bar{v} \in V$ es autovector asociado al mismo autovalor λ.

◯ *si t es un automorfismo, $\lambda = 0$ puede ser un autovalor.*

FALSO. Si $\lambda = 0$ es autovalor entonces existe un autovector no nulo $\bar{v}$ tal que $t(\bar{v}) = 0$, luego, el núcleo es no nulo y t no puede ser automorfismo (no es inyectiva).

(Primer parcial, febrero 2001)

(e) *De una matriz real A 4×4, se sabe que sólo tiene tres autovalores reales distintos dos a dos*

◯ *no existe ninguna matriz con estas condiciones.*

FALSO. Por ejemplo tomando como A la matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

OJO: Hay que tener en cuenta que aunque sólo tenga tres autovalores, alguno de ellos puede aparecer con multiplicidad algebraica mayor que 1 en el polinomio característico.

◯ *A nunca es diagonalizable por semejanza.*

FALSO. La matriz anterior verifica las hipótesis y es diagonal.

◯ *A siempre es triangularizable por semejanza.*

VERDADERO. Si tiene tres autovalores reales y distintos, uno de ellos ha de ser doble. Hay que tener en cuenta que el polinomio característico tiene grado 4. Si tuviese una solución compleja su conjugada también sería solución y por tanto a lo sumo podría haber 2 autovalores reales. Por tanto sus 4 soluciones son reales y la matriz es triangularizable.

◯ *si A es triangularizable por semejanza entonces es diagonalizable.*

FALSO. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Primer parcial, febrero 2001)