

Álgebra Lineal I

TEMA III- Espacios vectoriales.

Capítulo 4. Endomorfismos.

Diagonalización de endomorfismos.

Luis Fuentes García (2021).



Diagonalización de endomorfismos.

$f: U \rightarrow U$ diagonalizable



$\exists B$ base con F_{BB} diagonal ($M_{CB}^{-1} F_{CC} M_{CB} = F_{BB}$ diagonal)



$$A = F_{CC}$$

A diagonalizable por semejanza



$\exists P$ inversible con $P^{-1}AP = D$ diagonal

$f: U \rightarrow U$ diagonalizable $\Leftrightarrow$ Existe una base de U de **autovectores**.

$\vec{u} \neq \vec{0}$ **autovector** de f asociado a **autovalor** $\lambda \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$



$\vec{u}$ **autovector** de A , **autovalor** $\lambda \Leftrightarrow A\vec{u} = \lambda \vec{u}$

AUTOVALORES

Polinomio característico de f : $p_f(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ (grado $n = \dim(U) = \text{orden}(A)$)

λ_i **autovalor** de $f \Leftrightarrow$ es raíz del **polinomio característico** ($p_f(\lambda_i) = 0$)

Multiplicidad algebraica = **m. a.** (λ_i) = **multiplicidad** como raíz de $p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{ma(\lambda_i)} q(\lambda)$, $q(\lambda_i) \neq 0$

Multiplicidad geométrica = **m. g.** (λ_i) = $\dim(S_{\lambda_i}) = n^\circ$ **autovectores independientes** de $\lambda_i = \dim \ker(A - \lambda_i Id) = n - \text{rango}(A - \lambda_i Id)$

$$1 \leq \text{m. geométrica} \leq \text{m. algebraica}$$

$$\text{m. algebraica} = 1 \Rightarrow \text{m. geométrica} = 1$$

AUTOVECTORES asociados a cada autovalor λ_i

$\vec{u} \neq \vec{0}$ **autovector** de f asociado a **autovalor** $\lambda_i \Leftrightarrow (A - \lambda_i Id)\vec{u} = \vec{0}$

Subespacio característico asociado a $\lambda_i = S_{\lambda_i} = \{\text{autovectores asociados a } \lambda_i\} \cup \{\vec{0}\} = \{\vec{u} | (A - \lambda_i Id)\vec{u} = \vec{0}\} = \ker(A - \lambda_i Id)$



Diagonalización de endomorfismos.

AUTOVALORES

Polinomio característico de f : $p_f(\lambda) = p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ (grado $n = \dim(U) = \text{orden}(A)$)

λ_i autovalor de $f \Leftrightarrow$ es raíz del polinomio característico ($p_f(\lambda_i) = 0$)

Multiplicidad algebraica = **m. a.** (λ_i) = **multiplicidad** como raíz de $p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{ma(\lambda_i)} q(\lambda)$, $q(\lambda_i) \neq 0$

Multiplicidad geométrica = **m. g.** (λ_i) = $\dim(S_{\lambda_i}) = n^\circ$ **autovectores independientes** de $\lambda_i = \dim \ker(A - \lambda_i Id) = n - \text{rango}(A - \lambda_i Id)$

$$1 \leq \text{m. geométrica} \leq \text{m. algebraica}$$

$$\text{m. algebraica} = 1 \Rightarrow \text{m. geométrica} = 1$$

$f: U \rightarrow U$ diagonalizable $\Leftrightarrow$ Existe una base de U de **autovectores**.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum \text{m. algebraicas} = \dim(U) = \text{orden}(A) \\ \text{m. algebraicas} = \text{m. geométricas}, \text{ para todos y cada uno de los autovalores} \end{cases}$$

Si $A = F_{CC}$ diagonaliza:

$$F_{BB} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Autovalores (repetidos tantas veces como indica **multiplicidad**)

$$M_{CB} = P = \begin{pmatrix} \text{autovector}_1 & \text{autovector}_2 & \cdots & \text{autovector}_k \end{pmatrix}$$

Base B de **autovectores**.

Orden de **autovalores** y **autovectores** coherente.

$$P^{-1}AP = D$$



Triangularización de endomorfismos.

$f: U \rightarrow U$ triangularizable



$\exists B$ base con F_{BB} triangular ($M_{CB}^{-1} F_{CC} M_{CB} = F_{BB}$ triangular)



$$A = F_{CC}$$

A triangularizable por semejanza



$\exists P$ inversible con $P^{-1}AP = T$ triangular

$f: U \rightarrow U$ diagonalizable $\Leftrightarrow$ Existe una base de U de **autovectores**.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum \text{m. algebraicas} = n & (n = \dim(U) = \text{orden}(A)) \\ \text{m. algebraicas} = \text{m. geométricas}, \text{ para todos y cada uno de los autovalores} \end{cases}$$

$f: U \rightarrow U$ triangularizable $\Leftrightarrow \sum \text{m. algebraicas} = n$

En ese caso se puede conseguir una **forma de Jordan**

Caja de Jordan de orden k asociada al autovalor λ_i

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$k \times k$

Forma de Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{matrix} & 0 & & 0 \\ & 0 & \begin{matrix} \lambda_2 & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \end{matrix} & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & \begin{matrix} \lambda_k & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{matrix} \end{pmatrix}$$

