Álgebra Lineal I **Soluciones al Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **30 de junio de 2023**

1.– *Con las letras de la palabra INTERNET,*

(i) *¿Cuántas palabras de 8 letras pueden formarse?.*

Tenemos que contar las formas de permutar 8 caracteres de los cuales alguno se repiten; en particular hay dos N,T,E y una I,R. Se trata de permutaciones con repetición de 8 elementos de los cuales $2, 2, 2$ se repiten:

$$PR_{8;2,2,2} = \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3} = 5040.$$

(ii) *¿Cuántas de 7 letras?.*

Notamos que una palabra de 7 letras se construye retirando la última letra de una de 8; y recíprocamente se recupera la palabra de 8 letras a partir de una de 7 añadiendo al final la única letra que dejamos fuera.

Por tanto hay el mimso número de palabras de 7 letras que de 8: 5040.

¿Y de 6 letras?.

Distinguimos varios casos en función de que dos letras dejamos fuera para formar nuestra palabra de 6 letras.

- Eliminamos dos veces la misma letra (N,T ó E). Nos quedan 6 letras de las cuales DOS se repiten DOS veces. Son $PR_{6;2,2}$ palabras. Como había tres posibles pares de descartes, las opciones para este caso son $3 \cdot PR_{6;2,2}$.

- Eliminamos una letra de las repetidas dos veces (N,T ó E) y otra de las simples (I ó R). Nos quedan 6 letras de las cuales DOS se repiten DOS veces. Son $PR_{6;2,2}$ palabras. Como había $3 \cdot 2 = 6$ posibles pares de descartes, las opciones para este caso son $6 \cdot PR_{6;2,2}$.

- Eliminamos dos letras DISTINTAS de las dobles (N,T ó N,E ó T,E). Nos quedan 6 letras de las cuales UNA se repite DOS veces. Son $PR_{6;2}$ palabras. Como había 3 posibles pares de descartes, las opciones para este caso son $3 \cdot PR_{6;2}$.

- Se eliminan las dos letras simples R,I. Nos quedan 6 letras de las cuales TRES se repiten DOS veces. Son $PR_{6;2,2,2}$ palabras.

En total:

$$3 \cdot PR_{6;2,2} + 6 \cdot PR_{6;2,2} + 3 \cdot PR_{6;2} + PR_{6;2,2,2} = 6!\left(\frac{9}{2!2!} + \frac{3}{2!} + \frac{1}{2!2!2!}\right) = 6! \cdot \frac{31}{8} = 2790.$$

(1.1 puntos)

2.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ n \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz P_4 y hallar su determinante.*

Es una matriz donde aparece el número de fila en la diagonal y en otro caso su tamaño. Para $n = 4$ queda:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

El determinante lo calcularemos en general en el apartado siguiente.

(ii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$.*

Siguiendo la descripción dada y lo indicado en el apartado anterior la matriz P_n es:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}$$

Para hallar el determinante la diagonalizamos restando la última fila a todas las demás. Queda:

$$\begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}$$

Como es una matriz triangular su determinante es el producto de los términos de la diagonal:

$$|P_n| = (1-n)(2-n)\dots(-1)\cdot n = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 1\cdot n = (-1)^{n-1}n!$$

(iii) *¿Para qué valores de n es P_n congruente con la matriz identidad?.*

La matriz dada es simétrica, así que puede ser diagonalizada por congruencia. Será congruente con la identidad (que tiene toda la diagonal positiva) si al diagonalizarla por congruencia todos los elementos de la diagonal son positivos.

La diagonalización la tenemos hecha en el apartado anterior, simplemente repitiendo en columnas las mismas operaciones filas hechas. Nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Vemos que si $n = 1$ todos los elementos de la diagonal son positivos y por tanto si es congruente con la identidad (de hecho para $n = 1$, $P_1 = (1) = Id$). Pero para $n > 1$ ya el primer término de la diagonal es negativo $1 - n < 0$ y por tanto NO es congruente con la diagonal.

(1.1 puntos)

3.– *Sabiendo que A, B, C son matrices inversibles $n \times n$ calcular traza(M), siendo:*

$$M = (A \cdot B \cdot C)^{-1} - (B^t \cdot C)^{-1} + C^{-1} \cdot [(B^{-1} + C^t)^t - (A \cdot B)^{-1}]$$

Simplificamos la expresión dada. Usaremos que:

- La inversa del producto es el producto de inversas cambiadas de orden.

- La inversa de la traspuesta es igual a la traspuesta de la inversa.

$$\begin{aligned} M &= (A \cdot B \cdot C)^{-1} - (B^t \cdot C)^{-1} + C^{-1} \cdot [(B^{-1} + C^t)^t - (A \cdot B)^{-1}] = \\ &= C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} - C^{-1} \cdot (B^t)^{-1} + C^{-1} \cdot [(B^{-1})^t + (C^t)^t - B^{-1} \cdot A^{-1}] = \\ &= \underbrace{C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}}_{(*)} - \underbrace{C^{-1} \cdot (B^t)^{-1}}_{(**)} + \underbrace{C^{-1} \cdot (B^t)^{-1}}_{(**)} + \underbrace{C^{-1}C}_{Id} - \underbrace{C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}}_{(*)} = Id \end{aligned}$$

Entonces:

$$traza(M) = traza(Id) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}} = n.$$

(0.7 puntos)

4.– *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(i) *Estudiar si A es equivalente por filas a la matriz identidad.*

Dos matrices son equivalentes por filas si tienen la misma forma canónica reducida por filas. Esta es una matriz escalonada equivalente por filas a la original, con 1s como pivotes encima y debajo de los cuáles no hay ningún elemento no nulo. La matriz identidad ya es una forma canónica reducida por filas. Hallamos la de la matriz A escalonando mediante operaciones elementales filas:

$$A \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq Id.$$

Vemos que las formas canónicas reducidas por filas son distintas, luego A e Id no son equivalentes por filas (de hecho ni siquiera tienen el mismo rango, que es una condición necesaria para la equivalencia por filas).

(ii) *Dar una matriz de rango 2 que NO sea equivalente por filas a A.*

Basta escoger una forma canónica reducida por filas distinta de la de A. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) *Dar una matriz diagonal congruente con A.*

Dado que A es simétrica, basta diagonlizar A por congruencia, es decir, realizando operaciones filas y las mismas en columa:

$$A \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq Id.$$

(iv) *¿Existe una matriz diagonal equivalente por columnas a A?. Razona la respuesta.*

Dado que A es simétrica, sin más que trasponer lo hecho en el apartado (i), la forma canónica reducida por columnas es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma canónica reducida por columnas de una matriz diagonal es diagonal, por tanto es imposible que coincida con lo anterior. Concusión: NO existe una matriz diagonal equivalente por columnas a A.

(1.2 puntos)

5.– *En* $\mathbb{R}^4$ *y dado* $a \in \mathbb{R}$ *se consideran los conjuntos:*

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z - t = 0, x + y + z + t = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, a, 1), (0, 0, 2, 1)\}$$

(i) *En función de los valores de* a *calcular* $dim(U), dim(V), dim(U + V)$ *y* $dim(U \cap V)$.

El subespacio U está definido por dos ecuaciones implícitas independientes (porque son ecuaciones no proporcionales). Por tanto su dimensión es:

$$dim(U) = dim(\mathbb{R}^4) - \text{n de ecuaciones} = 4 - 2 = 2.$$

El subespacio V está dado por un sistema de generadores; su dimensión es el número de generadores independientes. Equivalentemente el rango de la matriz que forman las coordenadas de sus generadores respecto de la base canónica:

$$dim(V) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a/2 \end{pmatrix}.$$

La última fila será nula si $1 - a/2 = 0$, es decir, si $a = 2$. Por tanto:

$$dim(V) = \begin{cases} 2 \text{ si } a = 2 \\ 3 \text{ si } a \neq 2 \end{cases}$$

Para hallar $dim(U + V)$ buscamos una base de U. Los generadores de $U + V$ serán la unión de esa base y de los generadores de V. Para ello pasamos de implícitas a paramétricas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + t + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ -2z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

Queda $y = -x$ y $t = -z$ y por tanto las paramétricas:

$$x = a, \quad y = -a, \quad z = b, \quad t = -b$$

y los generadores:

$$U = \mathcal{L}\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$$

Entonces $U + V = \mathcal{L}\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 1 - a/2)\}$ (hemos usado los generadores de V de la matriz escalonada para facilitar las cuentas):

$$dim(U + V) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a/2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a/2 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a/2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a/2 \end{pmatrix} = 4$$

porque las cuatro primeras filas ya son independientes si tener en cuenta la última (el valor de a no influye entonces) y la dimensión no puede ser mayor a 4 porque estamos en $\mathbb{R}^4$.

Finalmente para la intersección usamos la fórmula de las dimensiones:

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V).$$

En resumen:

a	$dim(U)$	$dim(V)$	$dim(U+V)$	$dim(U \cap V)$
$= 2$	2	2	4	$2+2-4=0$
$\neq 2$	3	2	4	$3+2-4=1$

(ii) *Para $a = 2$ descomponer el vector $(2,2,3,0)$ como suma de un vector en U y otro en V. ¿Es única la descomposición?.*

Dado que para $a = 2$ hemos visto que $dim(U) + dim(V) = 4 = dim(\mathbb{R}^4)$ y que $dim(U \cap V) = 0$, los subespacios son suplementarios y por tanto cualquier vector se descompone de manera **única** como suma de uno en U y otro en V.

Para hacer la descomposición consideramos una base de $\mathbb{R}^4$ uniendo las bases de uno y otro subespacios calculadas antes:

$$B = \{\underbrace{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)}_{U},\underbrace{(1,1,0,0),(0,0,2,1)}_{V}\}$$

Escribimos el vector $(2,2,3,0)$ en la base B:

$$M_{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\0\end{pmatrix}_C, \qquad \text{con} \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}.$$

Operando:

$$M_{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\0\end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}_B$$

De manera que:

$$(2,2,3,0)_C =$$
$$= (0,1,2,1)_B = \underbrace{0\cdot(1,-1,0,0)+1\cdot(0,0,1,-1)}_{U}+\underbrace{2\cdot(1,1,0,0)+1\cdot(0,0,2,1)}_{V} = \underbrace{(0,0,1,-1)}_{U}+\underbrace{(2,2,2,1)}_{V}$$

(iii) *Para $a = 1$ dar las ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial W tal que V y W sean suplementarios.*

Para $a = 1$ vimos que una base de V es: $\{(1,1,0,0),(0,0,2,1),(0,0,0,1/2)\}$. Dado que para que sean suplementarios $dim(W) + dim(V) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$, tiene que cumplirse que $dim(W) = 4 - dim(V) = 4 - 3 = 1$. Además ha de verificarse que $dim(V + W) = 4$. Por tanto basta tomar un generador de W, de manera que unido a los de V obtengamos una matriz de rango 4. Por ejemplo:

$$W = \mathcal{L}\{(0,1,0,0)\}$$

ya que en ese caso:

$$rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix} = 4.$$

Las paramétricas serían:

$$x = 0, \quad y = a, \quad z = 0, \quad t = 0.$$

y las implícitas:

$$x = 0, \quad z = 0, \quad t = 0.$$

(1.4 puntos)

6.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Existe una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formada por cuatro matrices inversibles.*

VERDADERO. Por ejemplo:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Es base porque son tantas matrices (cuatro) como $dim\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y además son independientes porque su matriz de coordenadas tiene rango 4:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4$$

(ii) *Si $U, V \subset \mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales, $dim(U) = dim(V) = 70$ y $dim(U \cap V) = 40$ entonces $n \geq 100$.*

VERDADERO. Por la fórmula de las dimensiones:

$$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = 70 + 70 - 40 = 100$$

Pero como $U + V \subset \mathbb{R}^n$, $n = dim(\mathbb{R}^n) \geq dim(U + V) = 100$.

(iii) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z \geq 0\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

FALSO. Por ejemplo $(0, 0, 1) \in W$ porque $0^2 + 0^2 + 1 = 1 \geq 0$, pero $-1 \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, -1) \notin W$ porque $0^2 + 0^2 - 1 = -1 < 0$.

(iv) *Si $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ y $rango(AB) = 4$ entonces $rango(A) = 4$.*

VERDADERO. Si $rango(AB) = 4$ como $AB \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, $det(AB) \neq 0$. Pero:

$$0 \neq det(AB) = det(A)det(B)$$

y por tanto $det(A) \neq 0$ y $rango(A) = 4$.

(1.2 puntos)

7.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. De un endomorfismo $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se sabe que:*

$$f(1) = 2, \quad ker(f) = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}$$

(i) *Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.*

La base canónica es $C = \{1, x, x^2\}$ de manera que un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tiene coordenadas $p(x) = (a_0, a_1, a_2)_C$ en ese base.

Dado que una aplicación lineal queda totalmente determinada si conocemos la imagen de los vectores de una base, comenzamos hallando la matriz asociada respecto de una base sobre la cual tenemos información directa.

Sabemos que $f(1) = 2$ luego uno de los vectores de la base auxiliar será $1 = (1, 0, 0)_C$.

El núcleo corresponde a los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0, a_1, a_2)_C$ tales que $p(1) = 0$, es decir:

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Por tanto:

$$ker(f) = \{(a_0, a_1, a_2)_C \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_0 + a_1 + a_2 = 0\} = \mathcal{L}\{(1, -1, 0)_C, (0, 1, -1)_C\}.$$

Tomamos como base auxiliar $B = \{(1,0,0)_C, (1,-1,0)_C, (0,1,-1)_C\}$ es base porque está formada por $3 = dim\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ vectores que son independientes, porque la matriz de coordenadas que forman tiene rango 3:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Sabemos que:

$f((1,0,0)_C) = (2,0,0)_C$ porque $f(1) = 2$.

$f((1,-1,0)_C) = (0,0,0)_C$ porque $(1,-1,0)_C \in ker(f)$.

$f((0,1,-1)_C) = (0,0,0)_C$ porque $(0,1,-1)_C \in ker(f)$.

Por tanto:

$$F_{CB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de base:

$$F_{CC} = F_{CB}M_{BC} = F_{CB}M_{CB}^{-1}, \text{ donde } M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Hallar las ecuaciones implícitas en la base canónica de $Im(f)$.*

La imagen está generada por los vectores cuyas coordenadas en la base C son las columnas de F_{CC}:

$$Im(F) = \mathcal{L}\{(2,0,0)_C, (2,0,0)_C, (2,0,0)_C\} = \mathcal{L}\{(2,0,0)_C\}.$$

Las paramétricas son:

$$a_0 = 2\lambda, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

y elminando parámetros las implícitas:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

(ii) *Calcular $f((x+1)^2)$.*

Tenemos que:

$$(x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 = (1,2,1)_C$$

Usando la matriz asociada calculada en (i):

$$F_{CC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C.$$

Por tanto:

$$f((x+1)^2) = (8,0,0)_C = 8.$$

(1.1 puntos)

8.– *Sea el endomorfismo:*

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x,y,z,t) = (x+2y+t, 2x+y+t, -z+2t, t)$$

(i) *Calcular sus autovalores y autovectores.*

Los autovalores son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = |F_C - \lambda Id|$. La matriz asociada en la base canónica se halla directamente trasladando coeficientes:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico será:

$$|F_C - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= ((1-\lambda)^2 - 2^2)(-1-\lambda)(1-\lambda) = (-1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) =$$
$$= (-1-\lambda)^2(1-\lambda)(3-\lambda).$$

Los autovalores son:

$\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica 2.

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1.

$\lambda_1 = 3$ con multiplicidad algebraica 1.

Calculamos los autovectores asociados a cada uno de ellos.

Asociados a $\lambda_1 = -1$:

$$(F_C - (-1)Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x+2y+t=0 \\ 2x+2y+t=0 \\ 2t=0 \\ 2t=0 \end{cases}$$

Quedan las ecuaciones independientes:

$$2x+2y+t=0, \quad 2t=0.$$

Resolviendo $t = 0$ y $y = -x$ y así:

$$S_{-1} = \mathcal{L}\{(1,-1,0,0),(0,0,1,0)\}.$$

Asociados a $\lambda_2 = 1$:

$$(F_C - 1 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2y+t=0 \\ 2x+t=0 \\ -2z+2t=0 \end{cases}$$

Resolviendo $t = -2x, \quad y = x, \quad z = t = -2x$ y así:

$$S_1 = \mathcal{L}\{(1,1,-2,-2)\}.$$

Asociados a $\lambda_3 = 3$:

$$(F_C - 3\cdot Id)\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x+2y+t=0\\ 2x-2y+t=0\\ -4z+2t=0\\ -2t=0\end{cases}$$

Quedan las ecuaciones independientes:

$$2x-2y+t=0, \quad 2z-t=0 \quad t=0.$$

Resolviendo $t=0, \quad z=0, \quad x=y$ y así:

$$S_3 = \mathcal{L}\{(1,1,0,0)\}.$$

(ii) *Si existe, dar una base B y una matriz diagonal D tales que $F_B = D$.*

Dado que tenemos cuatro autovectores independientes, es decir, una base de autovectores conjuntamente forman una base respecto a la cual la matriz asociada es diagonal:

$$B = \{\underbrace{(1,-1,0,0),(0,0,1,0)}_{S_{-1}},\underbrace{(1,1,-2,-2)}_{S_1},\underbrace{(1,1,0,0)}_{S_3}\}.$$

Con:

$$F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

(iii) *Calcular $traza(F_C^9)$.*

Se tiene que:

$$F_C = M_{CB}F_BM_{CB}^{-1} \quad \Rightarrow \quad F_C^9 = M_{CB}F_B^9M_{CB}^{-1}$$

Dado que la traza se conserva por semejanza:

$$traza(F_C^9) = traza(F_B)^9 = (-1)^9+(-1)^9+(1)^9+3^9 = 3^9-1 = 19682.$$

(iv) *Si definimos $g:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x+y-z-t)$ hallar la matriz asociada a $g\circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$.*

La matriz asociada de la composición es el producto de las matrices asociadas. Si $h = g\circ f$,

$$H_{C_2C_4} = G_{C_2C_4}F_{C_4C_4}$$

siendo C_2, C_4 respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$. La matriz $F_{C_4C_4} = F_C$ la hallamos en el apartado (1). Trasladando coeficientes vemos que:

$$G_{C_2C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$H_{C_2C_4} = G_{C_2C_4}F_{C_4C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5\\ 3 & 3 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(1.3 puntos)

9.– *Sea la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x+y, x+y)$. *¿Puede ser* f *la aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro?. Razona la respuesta.* Una proyección tiene como autovalores únicamente al 1 o al 0, porque los vectores del espacio sobre el cuál proyectamos quedan fijos y los del espacio paralelamente al cuál proyectamos van al cero.

La matriz asociada en la base canónica de este endomorfismo es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus autovalores como raíces del polinomio característico:

$$|F_c - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Vemos que $\lambda = 2$ es autovalor y por tanto NO puede ser una proyección. (0.8 puntos)