Álgebra Lineal I — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **30 de junio de 2023**

1.– Con las letras de la palabra INTERNET,

(i) ¿Cuántas palabras de 8 letras pueden formarse?.

(ii) ¿Cuántas de 7 letras?. ¿Y de 6 letras?.

(1.1 puntos)

2.– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ n \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz P_4 y hallar su determinante.

(ii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$.

(iii) ¿Para qué valores de n es P_n congruente con la matriz identidad?.

(1.1 puntos)

3.– Sabiendo que A, B, C son matrices inversibles $n \times n$ calcular $traza(M)$, siendo:

$$M = (A \cdot B \cdot C)^{-1} - (B^t \cdot C)^{-1} + C^{-1} \cdot [(B^{-1} + C^t)^t - (A \cdot B)^{-1}]$$

(0.7 puntos)

4.– Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(i) Estudiar si A es equivalente por filas a la matriz identidad.

(ii) Dar una matriz de rango 2 que NO sea equivalente por filas a A.

(iii) Dar una matriz diagonal congruente con A.

(iv) ¿Existe una matriz diagonal equivalente por columnas a A?. Razona la respuesta.

(1.2 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^4$ y dado $a \in \mathbb{R}$ se consideran los conjuntos:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z - t = 0, x + y + z + t = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, a, 1), (0, 0, 2, 1)\}$$

(i) En función de los valores de a calcular $dim(U), dim(V), dim(U + V)$ y $dim(U \cap V)$.

(ii) Para $a = 2$ descomponer el vector $(2, 2, 3, 0)$ como suma de un vector en U y otro en V. ¿Es única la descomposición?.

(iii) Para $a = 1$ dar las ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial W tal que V y W sean suplementarios.

(1.4 puntos)

6.– Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

(i) Existe una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formada por cuatro matrices inversibles.

(ii) Si $U, V \subset \mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales, $dim(U) = dim(V) = 70$ y $dim(U \cap V) = 40$ entonces $n \geq 100$.

(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Si $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ y $rango(AB) = 4$ entonces $rango(A) = 4$.

(1.2 puntos)

7.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. De un endomorfismo $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se sabe que:

$$f(1) = 2, \quad ker(f) = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}$$

(i) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

(ii) Hallar las ecuaciones implícitas de $Im(f)$ en la base canónica.

(ii) Calcular $f((x + 1)^2)$.

(1.1 puntos)

8.– Sea el endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, t) = (x + 2y + t, 2x + y + t, -z + 2t, t)$$

(i) Calcular sus autovalores y autovectores.

(ii) Si existe, dar una base B y una matriz diagonal D tales que $F_B = D$.

(iii) Calcular $traza(F_C^9)$.

(iv) Si definimos $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t)$ hallar la matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$.

(1.4 puntos)

9.– Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x + y)$. ¿Puede ser f la aplicación proyección sobre un subespacio paralelamente a otro?. Razona la respuesta.

(0.8 puntos)

Álxebra Lineal I — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **30 de xuño de 2023**

1.– Coas letras da palabra INTERNET,

(i) Cantas palabras de 8 letras poden formarse?.

(ii) Cantas de 7 letras?. E de 6 letras?.

(1.1 puntos)

2.– Dado $n \in \mathbb{N}$ defínese a matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ n \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir a matriz P_4 e atopar o seu determinante.

(ii) Para cualquera $n \geq 2$, atopar $det(P_n)$.

(iii) Para que valores de n é P_n congruente coa matriz identidade?.

(1.1 puntos)

3.– Sabendo que A, B, C son matrices inversibles $n \times n$ calcular $traza(M)$, sendo:

$$M = (A \cdot B \cdot C)^{-1} - (B^t \cdot C)^{-1} + C^{-1} \cdot [(B^{-1} + C^t)^t - (A \cdot B)^{-1}]$$

(0.7 puntos)

4.– Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(i) Estudiar se A é equivalente por filas á matriz identidade.

(ii) Dar unha matriz de rango 2 que NON sexa equivalente por filas a A.

(iii) Dar unha matriz diagonal congruente con A.

(iv) Existe unah matriz diagonal equivalente por columnas a A?. Razoa a resposta.

(1.2 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^4$ e dado $a \in \mathbb{R}$ se consideran os conxuntos:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z - t = 0, x + y + z + t = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, a, 1), (0, 0, 2, 1)\}$$

(i) En función dos valores de a calcular $dim(U), dim(V), dim(U + V)$ e $dim(U \cap V)$.

(ii) Para $a = 2$ descompoñer o vector $(2, 2, 3, 0)$ como suma dun vector en U e outro en V. É única a descomposición?.

(iii) Para $a = 1$ dar as ecuacións implícitas dun subespazo vectorial W tal que V e W sexan suplementarios.

(1.4 puntos)

6.– Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes cuestións:

(i) Existe unha base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ formada por catro matrices inversibles.

(ii) Se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ son subespazos vectoriais, $dim(U) = dim(V) = 70$ e $dim(U \cap V) = 40$ entón $n \geq 100$.

(iii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z \geq 0\}$ é un subespazo vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Se $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $rango(AB) = 4$ entón $rango(A) = 4$.

(1.2 puntos)

7.– Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que 2. De un endomorfismo $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se sabe que:

$$f(1) = 2, \quad ker(f) = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}$$

(i) Atopar a matriz asociada a f respecto da base canónica.

(ii) Atopar as ecuacións implícitas de $Im(f)$ na base canónica.

(ii) Calcular $f((x + 1)^2)$.

(1.1 puntos)

8.– Sexa o endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x, y, z, t) = (x + 2y + t, 2x + y + t, -z + 2t, t)$$

(i) Calcular os seus autovalores e autovectores.

(ii) Se existe, dar unha base B e unha matriz diagonal D tales que $F_B = D$.

(iii) Calcular $traza(F_C^9)$.

(iv) Se definimos $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y - z - t)$ atopar a matriz asociada a $g \circ f$ respecto das bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$.

(1.4 puntos)

9.– Sexa a aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x + y)$. Pode ser f a aplicación proxección sobre un subespacio paralelamente a outro?. Razoa a resposta.

(0.8 puntos)
