Álgebra Lineal I — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **11 de julio de 2022**

1.– *Con los dígitos* $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(i) *¿Cuántos números de cuatro cifras distintas pueden formarse?.*

En la primera cifra pueden colocarse cualquiera de los 6 dígitos posibles. Hay 6 opciones. Para la segunda cualquier menos la usada en la primera posición: 5 opciones. Para la tercera, cualquiera menos las dos usadas antes: 4 opciones. Para la última 3 opciones (no podemos usar las tres cifras anteriores). Por tanto en total:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

(ii) *¿En cuántos de ellos NO aparecen dos cifras pares juntas?.*

Si denoto por P cifra par y por I impar, teniendo en cuenta que hay un máximo de tres de cada tipo, las posibles configuraciones donde aparecen NO aparecen cifras pares juntas son:

- Cualquier número con tres impares y una par: PIII,IPII,IIPI,IIIP. Por cada una de estas cuatro configuraciones las posibilidades para escoger las cifras impares (razonando como en (i)) son $3 \cdot 2 \cdot 1$. Para la par 3 opciones. En total por tanto:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 72$$

- Números con dos pares y dos impares: de la forma PIPI,IPIP,PIIP. Para cada una de ellas tenemos $3 \cdot 2$ para posibilidades para las pares y las mismas para las impares (razonando como en (i)). Por tanto en total:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 108.$$

- No pueden tener tres cifras pares, ya que necesariamente dos pares estarían juntas.

En definitiva la cantidad de números en las condiciones indicadas son:

$$72 + 108 = 180.$$

(1 punto)

2.– *Para cada número natural n se define una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$a_{ij} = i + j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

(i) *Escribir la matriz A para $n = 4$ y calcular su determinante.*

La matriz para $n = 4$ es:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & 1+4 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & 2+4 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3+4 \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Como veremos y probaremos en el apartado siguiente su determinante es cero.

(ii) *Calcular el rango y el determinante de A para cualquier natural n.*

Para $n = 1$ la matriz es $A = (1 + 1) = (2)$, su determinante es 2 (no nulo) y por tanto el rango el máximo posible 1.

Para $n = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Su determinante es $2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -1$ no nulo; por tanto el rango es 2.

Veamos el caso general para $n > 2$. Haremos operaciones elementales fila y columna que conservan el rango y determinante. La matriz en general es:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 & \dots & 1+n-1 & 1+n \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 & \dots & 2+n-1 & 2+n \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & \dots & 3+n-1 & 3+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+1 & (n-1)+2 & (n-1)+3 & \dots & (n-1)+n-1 & (n-1)+n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+n-1 & n+n \end{pmatrix}$$

Restamos a cada columna la anterior:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2^1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Restamos la segunda columna a la tercera, cuarta y siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como tiene una columna de ceros el determinante es nulo. Además sólo hay dos columnas no nulas, luego el rango a lo sumo es 2. En particular el menor formado por las dos primeras filas y columnas tiene determinante $2 - 3 = --1 \neq 0$, por tanto el rango es exactamente 2.

Es decir si $n \neq 3$, $rango(A) = 2$ y $det(A) = 0$.

(1 punto)

3.– *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$:

(i) *Hallar la forma canónica reducida por filas de la matriz A.*

Hacemos operaciones elementales fila hasta obtener la forma canónica reducida por filas:

$$A \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) *Hallar, si existe, una matriz inversible P tal que* $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La existencia de una matriz P inversible que multiplicada por la derecha transforme A en otra matriz B equivale a que A y B sean equivalentes por filas. Dos matrices son equivalentes por filas si y sólo si tienen la misma forma canónica reducida por filas; pero en el apartado anterior hemos calculado la de A y no coincide con $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ que ya es una forma canónica. Por tanto no existe una matriz P en las condiciones indicadas.

(iii) *Hallar, si existe, una matriz inversible Q tal que* $AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ahora la existencia de la matriz Q inversible que multiplicada por A por la derecha de otra matriz corresponde a que ambas sean equivalentes por columnas. Transformamos la matriz dada mediante operaciones elementales columna:

$$A \overset{\mu_{31}(-4)\mu_{41}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(7)\mu_{42}(5)\mu_{12}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz Q hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna realizadas anteriormente:

$$Id \overset{\mu_{31}(-4)\mu_{41}(-4)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(7)\mu_{42}(5)\mu_{12}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ -2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.3 puntos)

4.– *Dar un ejemplo de tres matrices $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simétricas y no diagonales, de manera que ningún par de ellas sean congruentes entre si. Justificar la respuesta.*

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tienen respectivamente: $rango(A) = 1$ (está escalonada con una única fila no nula); $rango(B) = 2$ (su determinante es cero pero el menor 2×2 formado por las dos primeras filas y columnas tiene determinante no nulo; $rango(C) = 3$, ya que su determinante es no nulo.

Ningún par de ellas pueden ser congruentes, porque la congruencia conserva el rango.

(0.8 puntos)

5.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y dado un número real a se consideran los subespacios:*

$$U = \mathcal{L}\{(1,a,0,1),(2,2,a,0),(1,1,0,a)\}, \quad V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = 0, \quad y - z = 0\}.$$

(i) *Hallar la dimensión de U, V, $U+V$ y $U \cap V$ en función de a.*

La dimensión de U coincide con el rango de la matriz de coordenadas de los vectores que lo generan:

$$dim(U) = rango \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 2 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} = rango(A_U)$$

Calculamos el rango escalonando por filas la matriz:

$$A_U \overset{H_{21}(-2)H_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 2-2a & a & -2 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & -2a \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a & -2a \end{pmatrix}$$

Vemos que:

$$dim(U) = rango(A_U) = \begin{cases} 3 \text{ si } a \neq 0, 1 \\ 2 \text{ si } a = 0, 1 \end{cases}$$

En cuanto a V viene dado por sus ecuaciones implícitas. Son independientes porque no son propocionales. Por tanto:

$$dim(V) = dim(\mathbb{R}^4) - \text{n de ecuaciones independientes} = 4 - 2 = 2.$$

Para hallar $dim(U+V)$ primero calculamos un sistema generador de V pasando de sus ecuaciones implícitas a paramétricas:

$$y = x, \qquad z = y \quad \Rightarrow \quad x = a,\ y = a,\ z = a,\ t = b.$$

Por tanto $V = \mathcal{L}\{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Además por la reducción por filas hecha para los generadores de U:

$$U = \mathcal{L}\{(1,a,0,1),(0,1-a,0,a-1),(0,0,a,-2a)\}.$$

Por tanto:

$$U + V = \mathcal{L}\{(1,a,0,1),(0,1-a,0,a-1),(0,0,a,-2a),(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

La dimensión de $U+V$ es el rango de la matriz que forman las coordenadas de sus generadores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & a & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{43}(a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que si $a = 1$ tiene rango 3 y en otro caso rango 4.

Finalmente para la intersección utilizamos la fórmula:

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V)$$

En resumen:

a	$dim(U)$	$dim(V)$	$dim(U+V)$	$dim(U \cap V)$
$= 0$	2	2	4	0
$= 1$	2	2	3	1
$\neq 0, 1$	3	2	4	1

(ii) *Para $a = 1$ hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$.*

Hemos visto que en se caso $dim(U \cap V) = 1$. Hallamos las implícitas de U. Tenemos que:

$$U = \mathcal{L}\{(1,1,0,1),(0,0,1,-2)\}$$

Sus paramétricas son:

$$x = a, \quad y = a, \quad z = b, \quad t = a - 2b.$$

Y las implícitas:

$$x - y = 0, \quad x - 2z - t = 0.$$

Ahora las ecuaciones impícitas de $U \cap V$ se obtienen uniendo las de U y V:

$$x - y = 0, \quad x - 2z - t = 0, \quad x - y = 0, \quad y - z = 0$$

Como $dim(U \cap V) = 1$, $dim(\mathbb{R}^4) - 1 = 3$ de ellas han de ser independientes. Dado que la primera y tercera coinciden, las independientes son:

$$x - y = 0, \quad x - 2z - t = 0, \quad y - z = 0$$

Resolvemos para obtener las paramétricas:

$$y = x, \quad z = x, \quad t = -x.$$

Las paramétricas quedan:

$$x = a, \quad y = a, \quad z = a, \quad t = -a.$$

(iii) *Para $a = 0$ probar que los subespacios U y V son suplementarios y calcular la proyección de $(1, 2, 1, 1)$ sobre U paralelamente a V.*

Son suplementarios si $U \cap V = \{\vec{0}\}$ y $U + V = \mathbb{R}^4$. Equivalentemente si $dim(U \cap V) = 0$ y $dim(U + V) = 4$. Pero hemos visto en (i) que esto se cumple para $a = 0$.

La proyección $\vec{u}$ buscada es un vector de U y por tanto se escribe como combinación lineal de sus generadores:

$$\vec{u} = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, 0, -1) = (a, b, 0, a - b)$$

Además tiene que cumplirse que $(1, 2, 1, 1) - \vec{u} = (1 - a, 2 - b, 1, 1 - a + b) \in V$; es decir ese vector tiene que cumplir las ecuaciones impícitas de V:

$$1 - a - 2 + b = 0, \qquad 1 - a - 1 = 0.$$

Resolviendo obtenemos $a = 0$ y $b = 1$. Por tanto la proyección buscada es $(a, b, 0, a - b) = (0, 1, 0, -1)$.

(1.5 puntos)

6.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *En un espacio vectorial de dimensión 20, un conjunto de 21 vectores siempre es un sistema generador.*

FALSO. Por ejemplo en $\mathbb{R}^{20}$ si tomamos el conjunto de vectores $\{(k, 0, 0, 0) | k = 1, 2, \ldots, 21\}$ son todos ellos vectores dependientes multiplos de $(1, 0, 0, 0)$. Por tanto generan un subespacio de dimension 1 y NO son un sistema generador de todo el espacio vectorial.

(ii) *Una aplicación lineal lleva vectores linealmente dependientes en vectores linealmente dependientes.*

VERDADERO. Si $f : U \to V$ es una aplicación lineal y un vector u depende linealmente de otros $u_1, u_2, \ldots, u_k$ se tiene que:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k$$

Aplicando f:

$$f(u) = f(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k)$$

y por linealidad:

$$f(u) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + \ldots + a_k f(u_k)$$

es decir $f(u)$ depende linealmente de $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)$

(iii) *Las coordenadas de un vector no nulo respecto a dos bases diferentes siempre son distintas.*

FALSO. Por ejemplo el vector nulo siempre tiene coordenadas cero respecto a cualquier base. O por ejemplo si en $\mathbb{R}^2$ tomamos las bases:

$$B = \{(1, 0), (1, 1)\}, \qquad C = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

en ambas bases el vector $(1,0)$ tiene coordenadas $(1,0)$ porque:

$$(1,0) = 1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (1,1), \qquad (1,0) = 1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1).$$

(iv) *Una aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ *siempre es sobreyectiva.*

FALSO. Por ejemplo la aplicación nula es lineal y no es sobreyectiva porque su imagen es sólo el vector cero.

(1.2 puntos)

7.– *Sea* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que* 2 *con coeficientes reales. Se define:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \qquad f(p(x)) = (p(0), p(1), p(2))$$

(i) *Probar que* f *es una aplicación lineal.*

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ hay que demostrar que:

$$f(ap(x) + bq(x)) = af(p(x)) + bf(q(x))$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(ap(x) + bq(x)) &= (ap(0) + bq(0), ap(1) + bq(1), ap(2) + bq(2)) = \\ &= a(p(0), p(1), p(2)) + b(q(0), q(1), q(2)) = af(p(x)) + bf(q(x)). \end{aligned}$$

(ii) *Hallar la matriz asociada a* f *respecto de las bases canónicas.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C = \{1, x, x^2\}$ y la de $\mathbb{R}^3$ es $C' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Por definición la matriz asociada $F_{C'C}$ es aquella cuyas columnas son las imágenes de los vectores de la base C expresadas en la base C':

$$\begin{aligned} f(1) &= (1,1,1) = (1,1,1)_{C'} \\ f(x) &= (0,1,2) = (0,1,2)_{C'} \\ f(x^2) &= (0^2, 1^2, 2^2) = (0,1,4)_{C'} \end{aligned}$$

La matriz asociada es:

$$F_{C'C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(iii) *Hallar la matriz asociada a* f *respecto de las bases* $B = \{1, (x-1), (x-2)^2\}$ *de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *y* $B' = \{(0,1,0), (0,0,1), (1,0,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

Por la fórmula de cambio de base:

$$F_{B'B} = M_{B'C'} F_{C'C} M_{CB} = M_{C'B'}^{-1} F_{C'C} M_{CB}$$

donde, dado que $(x-2)^2 = 4 - 4x + x^2$,

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{C'B'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{C'B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queda:

$$F_{B'B} = M_{C'B'}^{-1} F_{C'C} M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

8.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo diagonalizable. Si $ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$, $(1, 1, -1)$ es un autovector de f asociado al autovalor 2, hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.*

Los vectores $\vec{u}$ del núcleo cumplen $f(\vec{u}) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$ y por tanto son autovalores asociados al 0. Dado que

$$dim(ker(f)) = dim(\mathbb{R}^3) - \text{número de ecuaciones} = 2$$

, hay dos autovectores independientes asociados al 0.

También sabemos que 2 es autovalor con al menos el autovector $(1, 1, -1)$ asociado.

Dado que la suma de multiplicidades geométricas no puede superar la dimensión del espacio y 0 al menos tiene multiplicidad 2, entonces $\lambda_2 = 2$ sólo puede tener multiplicidad 1.

Deducimos que los autovalores de f son:

- El 0 con multiplicidad geométrica y algebraica 2.

- $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad geométrica y algebraica 1.

Los autovectores del núcleo son (pasamos de la implícita a paramétricas):

$$x = -y - z \Rightarrow x = -a - b, \quad y = a, \quad z = b \Rightarrow ker(f) = \mathcal{L}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}.$$

Conlcuimos que en la base $B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$ de autovectores la matriz asociada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente cambiamos a la base canónica:

$$F_C = M_{CB} F_B M_{BC} = M_{CB} F_B M_{CB}^{-1}$$

con

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

9.– *Dada la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular sus autovalores y autovectores. ¿Es diagonalizable por semejanza?.

Comenzamos hallando el polinomio característico:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda Id) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^3$$

Los autovalores son sus raíces:

- $\lambda_1 = 2$ con mutliplicidad algebrica 1.

- $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

Calculamos ahora los autovectores asociados a $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$-x = 0, \quad x + t = 0, \quad x - z = 0, \quad t - z = 0$$

Resolviendo:

$$x = 0, \quad t = 0, \quad z = 0$$

obtenemos las paramétricas:

$$x = 0, \quad y = a, \quad z = 0, \quad t = 0$$

y finalmente:

$$S_2 = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0)\}.$$

Calculamos ahora los autovectores asociados a $\lambda_2 = 1$:

$$(A - \lambda_2 Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$x + y + t = 0, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

Resolviendo:

$$x = 0, \quad t = -y, \quad z = 0$$

obtenemos las paramétricas:

$$x = 0, \quad y = a, \quad z = 0, \quad t = -a$$

de donde:

$$S_2 = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, -1)\}.$$

No es diagonalizable por semejenza porque la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda_2 = 1$ es $dim(S_2) = 1$ diferente de la algebraica que es 3.

(1 punto)