Álgebra Lineal I | **Soluciones al Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **19 de enero de 2024**

1.– *Ocho equipos de fútbol, dos españoles, dos ingleses y los demás de países diferentes, se distribuyen en dos grupos de cuatro para organizar una competición.*

(i) *¿De cuántas formas distinas pueden quedar repartidos los equipos?.*

Fijamos uno de los equipos y contamos cuantas posibilidades hay para elegir los tres que le acompañarán. Son las formas de elegir tres elementos entre un total de siete, de manera que no pueden repetirse y no importa el orden. Es decir, combinaciones sin repetición de 7 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

(ii) *¿Y si en un mismo grupo no pueden ir dos equipos del mismo país?.*

Ahora fijamos uno de los dos equipos españoles y contamos las formas de elegir sus tres acompañantes. Necesariamente en su grupo ha de estar uno de los dos ingleses ya que no pueden estar ambos en el otro grupo. Tenemos 2 opciones para elegir cuál. Luego completan el grupo 2 equipos elegidos entre los 4 restantes. Es decir en total:

$$2 \cdot C_{4,2} = 2 \cdot \binom{4}{2} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 12.$$

2.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{R}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} k \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz P_4 y hallar $det(P_4)$ y $rango(P_4)$ en función de k.*

Tenemos:

$$P_4 = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

El determinante y el rango lo calcularemos en el siguiente apartado de manera general.

(ii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$ y $rango(P_n)$ en función de n y k.*

$$P_n = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix}$$

Para hallar el determinante comenzamos sumando a la primera fila todas las demás (el valor del determinante se mantiene) (*):

$$|P_n| = \begin{vmatrix} k+n-1 & k+n-1 & k+n-1 & \dots & k+n-1 & k+n-1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{vmatrix}$$

Si $k+n-1=0$ la primera fila es nula y por tanto el determinante es nulo. En otro caso sacamos factor común $k+n-1$ en la primera fila:

$$|P_n| = (k+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{vmatrix}$$

(notamos que la expresión es también válida para $k+n-1=0$ ya que en ese caso da cero). Restamos la primera fila a todas las demás:

$$|P_n| = (k+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+n-1)(k-1)^{n-1}.$$

Por tanto $|P_n| = (k+n-1)(k-1)^{n-1}$ y en particular $|P_4| = (k+3)(k-1)^3$.

En cuanto al rango, sabemos que es máximo si $|P_n| \neq 0$, es decir si $k+n-1 \neq 0$ y $k-1 \neq 0$.

Estudiamos esos dos casos particulares.

- Si $k=1$ la matriz original tiene todas las filas iguales (formadas por unos) por tanto el rango es 1 ya que todas las filas son dependientes de la primera.

- Si $k = 1-n \leq 0$ entonces tras sumar todas las filas a la primera queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix}$$

La primera fila es nula y por tano $rango(P_n) < n$ (**). Restando la primera columna a todas las demás queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 01 \\ 0 & k-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

La submatriz formada por las últimas $n-1$ filas y columnas es diagonal de determinante $(k-1)^{n-1} \neq 0$ (porque $k-1 = 1-n-1 = -n \neq 0$) y por tanto $rango(P_n) \geq n-1$. Junto con (**) concluimos que $rango(P_n) = n-1$.

En resumen:

$$rango(P_n) = \begin{cases} n \text{ si } k \neq 1-n, 1 \\ n-1 \text{ si } k = 1-n \\ 1 \text{ si } k = 1 \end{cases}$$

3.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Hallar, si existe, una matriz inversible* P *tal que* $PAP^t = B$.

Que exista una matriz inversible P tal que $PAP^t = B$, significa que las matrices son congruentes. La condición para que esto ocurra es que al diagonlizarlas por congruencia, es decir medianta operaciones elementales fila y las mismas en columna, aparezcan los mismos signos en la diagonal. Comenzamos analizando si es así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)}\xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)}\xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(1)}\xrightarrow{\mu_{23}(1)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/2)}\xrightarrow{\mu_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que en ambos casos obtenemos dos signos positivos y uno negativo en la diagonal y por tanto son congruentes. La matriz P que cumple $PAP^t = B$, representa las operaciones fila que se hacen en el proceso de pasar de A a B por congruencia. Para aprovechar las cuentas ya hechas, completamos la diagonalización de A hasta llegar exactamente a la misma forma diagonal que llegamos en B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}}\xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(2)}\xrightarrow{\mu_1(2)}\xrightarrow{H_2(2)}\xrightarrow{\mu_2(2)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Después sobre la identidad haremos las mismas operaciones fila hechas al diagonalizar A y la inversa y en orden opuesto de las hechas en B.

$$Id \xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(2)}\xrightarrow{H_2(2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P$$

4.– *Sean las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(i) *Estudiar para que valores de* a, b *las matrices son equivalentes por filas.*

Para estudiar si son equivalentes por filas hallamos la forma canónica reducida por filas de cada una de ellas, escalonando con operaciones elementales fila. Seran equivalentes por filas si y sólo si las formas canónicas reducidas por filas son las misma. Comenzamos con la matriz B que no depende de ningún parámetro:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_1(1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-2a \end{pmatrix}$$

Entonces son equivalentes por filas si y sólo si $b - 2a = 0$ (para que tengan el mismo rango) y $a = 1/2$ (para que coincidan las formas reducidas). Es decir, $a = 1/2$ y $b = 1$.

(ii) *Estudiar para que valores de* a, b *las matrices son equivalentes por columnas.*

Realizamos el estudio análogo pero con operaciones columna:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_1(1/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & b-2a \end{pmatrix}$$

Vemos que es imposible que sean equivalentes por columna porque $b-2a$ debería de ser nulo, para que tengan el mismo rango; y entonces en la formas canónicas reducidas por columnas en la posición $2,1$ en una aparece $1/2$ y en la otra 2: nunca coinciden.

(iii) *Para los valores de a, b obtenidos en (i) dar una matriz inversible P tal que $PA = B$.*

Realizamos sobre la identidad las operaciones fila hechas para pasar de A a la forma reducida por filas y después la inversa y en orden opuesto de las realizadas a B:

$$Id \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_1(4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

5.– *En $\mathbb{R}^3$ sean U y V dos subespacios suplementarios. Se sabe que la proyección de $(1,-1,1)$ sobre U paralelamente a V es $(1,-1,0)$ y la proyección de $(1,1,0)$ sobre V paralelamente a U es $(0,0,2)$. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de U y V respecto de la base canónica.*

Recordemos que si la proyección de un vector w sobre U paralelamente a V es u, entonces $w = u + v$ con $u \in U$ y $v \in V$ y en concreto $v = w - u$.

Análogamente si la proyección de un vector w sobre V paralelamente a U es v, entonces $w = u + v$ con $u \in U$ y $v \in V$ y en concreto $u = w - v$.

Entonces si la proyección de $(1,-1,1)$ sobre U paralelamente a V es $(1,-1,0)$ tenemos que:

$$(1,-1,1) = \underbrace{(1,-1,0)}_{\in U} + \underbrace{((1,-1,1)-(1,-1,0))}_{\in V} \text{ es decir}(1,-1,0) \in U \text{ y } (0,0,1) \in V$$

Y si la proyección de $(1,1,0)$ sobre V paralelamente a U es $(0,0,2)$ tenemos que:

$$(1,1,0) = \underbrace{((1,1,0)-(0,0,2))}_{\in U} + \underbrace{(0,0,2)}_{\in V} \text{ es decir}(1,1,-2) \in U \text{ y } (0,0,2) \in V$$

Los vectores $(1,-1,0),(1,1,-2)$ de U son indpendientes; pero $(0,0,1),(0,0,2)$ de V son dependientes.

Por tanto:

$$\mathcal{L}\{(1,-1,0),(1,1,-2)\} \in U \text{ y entonces } dim(U) \geq 2$$
$$\mathcal{L}\{(0,0,1)\} \in V \text{ y entonces } dim(V) \geq 1$$

Como son espacios suplementarios $dim(U) + dim(V) = 3$ y la única posibilidad es $dim(U) = 2$ y $dim(V) = 1$.

Concluimos:

$$U = \mathcal{L}\{(1,-1,0),(1,1,-2)\}$$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = a + b, \qquad y = -a + b, \qquad z = -2b$$

Y eliminando parámetros obtenemos la impícita. Sumando las dos primeras ecuaciones $x + y = 2b$ y utilizando la tercera:

$$x + y + z = 0.$$

Y el otro subespacio:

$$V = \mathcal{L}\{(0,0,1)\}$$

Sus paramétricas son:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = a.$$

Y eliminado parámetros las implícitas:

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

6.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son dos matrices simétricas e inversibles y $traza(A) = traza(B)$ entonces A y B son congruentes.*

FALSO. Por ejemplo si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ NO son congruentes porque su determinante tiene distinto signo, pero ambas son inversibles (determinante no nulo) y tienen la misma traza: $1 + 1 = 3 + (-1)$.

(ii) *Si $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cumplen $det(A) = det(B)$ y $traza(A) = traza(B)$ entonces $rango(A) = rango(B)$.*

FALSO. Por ejemplo si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $det(A) = det(B) = 0$ y $traza(A) = 1 + (-1) = 0 = 0 + 0 = traza(B)$; sin embargo $rango(B) = 0$ pero $rango(A) = 1$ (tienes dos filas proporcionales no nulas).

(iii) *Si U, V son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{100}$, con $dim(U) = dim(V) = 60$ entonces $dim(U \cap V) \geq 20$.*

VERDADERO. Por la fórmula de las dimensiones:

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V)$$

Domo $U + V \subset \mathbb{R}^{100}$ entonces $dim(U + V) \leq dim(\mathbb{R}^{100}) = 100$ y:

$$dim(U \cap V) \geq dim(U) + dim(V) - dim(\mathbb{R}^{100}) = 60 + 60 - 100 = 20.$$

(iv) *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal cumpliendo $f(1,1) = (1,1)$ y $f(1,2) = (2,2)$ entonces $ker(f) = \{(0,0)\}$.*

FALSO. Por ejemplo de los datos dados:

$$f(2,2) = f(2(1,1)) = 2f(1,1) = 2(1,1) = (2,2) = f(1,2)$$

Por tanto:

$$f((2,2) - (1,2)) = f(2,2) - f(1,2) = (0,0)$$

y $(2,2) - (1,2) = (1,0) \in ker(f)$.

Otra forma sería tener en cuenta que nos dan la imagen de dos vectores que forman base $B = \{(1,1),(1,2)$. La matriz asociada en la base B y en la canónica sería:

$$F_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $dim(im(f)) = rango(F_{CB}) = 1$ y $dim(ker(f)) = dim(\mathbb{R}^2) - dim(im(f)) = 2 - 1 = 1$ y por tanto $ker(f) \neq \{(0,0)\}$.

7.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Consideramos los siguientes subconjuntos:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{x+1, x^2+1\}, \quad W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1)^2 = p(1)\}$$

(i) *Estudiar si U y W son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

U SI es subespacio vectorial:

- Contiene al vector cero, es decir, al polinomio cero constante $p_0(x) = 0$, porque $p_0(1) = 0$.

- Dados $p(x), q(x) \in U$ y $a, b \in \mathbb{R}^2$ veamos que $ap(x) + bq(x) \in U$. Como $p(x), q(x) \in U$ se tiene que $p(1) = q(1) = 0$ y por tanto:

$$ap(1) + bq(1) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \Rightarrow ap(x) + bq(x) \in U.$$

W NO es subespacio vectorial. No cumple la propiedad: si $p(x) \in W$ entonces $k \cdot p(x) \in W$. Por ejemplo si $p(x) = 1$ entonces $p(x) \in W$ porque $p(1)^2 = 1^2 = 1 = p(1)$, pero $2p(x) \notin W$ porque $(2p(1))^2 = 2^2 = 4 \neq 2 = 2p(1)$.

(ii) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ en la base canónica.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C = \{1, x, x^2\}$ de manera que si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ sus coordenadas en la base canónica son $(a_0, a_1, a_2)_C$.

Entonces si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \equiv (a_0, a_1, a_2)_C \in U$ significa que:

$$p(1) = 0 \iff a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 0 \iff a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Por tanto:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C | a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

es decir $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ es la ecuación implícita de U en la base canónica.

Por otra parte $V = \mathcal{L}\{x+1, x^2+1\} = \mathcal{L}\{(1,1,0)_C, (1,0,1)_C\}$. Los dos generadores son independietntes porque no son proporcionales. Las paramétricas son:

$$a_0 = \alpha + \beta, \quad a_1 = \alpha, \quad a_2 = \beta$$

Y eliminando parámetros las implícitas:

$$a_0 - a_1 - a_2 = 0.$$

Las implícitas de $U \cap V$ se obtienen uniendo las de ambos subespacios (son independientes por no ser proporcionales):

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

Para hallar las paramétricas resolvemos el sistema en función de $3 - 2 = 1$ parámetros. Sumando las eucuaciones queda $a_0 = 0$ y después en la primera $a_2 = -a_1$. Por tanto las paramétricas quedan:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \lambda, \qquad a_2 = -\lambda.$$

(iii) *Demostrar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

Dado que $dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ y B está formado por tres vectores, para que sean base basta ver que son independientes; equivalentemente qu eel rango de la matriz que forman sus coordenadas es 3:

$$\begin{aligned} &1 = (1,0,0)_C \\ &x - 1 = (-1,1,0)_C \\ &(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2 = (1,-2,1)_C \end{aligned}$$

Entonces:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{ (ya está escalonada).}$$

(iv) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de V en la base B.*

La ecuación implícita de V en la base canónica era $a_0 - a_1 - a_2 = 0$, que matricialmente puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_C = 0. \qquad (*)$$

Usamos la relación entre las coordenadas en distintas bases:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_C = M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B \quad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B = 0 \iff b_0 - 2b_1 + 3b_2 = 0.$$

obteniendo la ecuación implícita en la base B. Para las paramétricas resolvemos en función de dos parámetros. Queda $b_0 = 2b_1 - 3b_2$ de donde:

$$b_0 = -2\alpha - 3\beta, \qquad b_1 = \alpha, \qquad b_2 = \beta.$$

(v) *¿Es posible descomponer cualquier vector de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como suma de uno de U y otro de W?¿Es única esa descomposición?.*

No, no es posible. Si $p(x) = q(x) + r(x)$ con $q(x) \in U$ y $r(x) \in w$ entonces $q(1) = 0$ y $r(1)^2 = r(1)$, pero entonces $p(1) = q(1) + r(1) = r(1)$ tiene que cumplir $p(1)^2 = p(1)$. Cualquier polinomio que NO cumpla esa condición no podrá descomponerse; por ejemplo $p(x) = 2$.

8.– *De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se sabe que:*

- *$f(1,1,1) = Id$.*

- *$ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$.*

Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Usaremos que una aplicación lineal queda totalmente determinada si sabemos las imágenes de los vectores de una base.

Resolviendo la ecuación implícita del núcleo $z = -x$, se tiene que:

$$ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\} = \mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}.$$

y $f(1,0,-1) = f(0,0,1) = 0$ (matriz cero) por estar en el núcleo.

Los vectores $B = \{(1,1,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$ forman base porque son tres vectores en un espacio de dimensión tres e independientes porque su matriz de coordenadas tiene rango 3:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3.$$

Y sabemos que:

$$f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,0,1)_{C'}$$

$$f(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)_{C'}$$

$$f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)_{C'}$$

donde $C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

De ahí:

$$F_{C'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente hacemos el cambio de base:

$$F_{C'C} = F_{C'B}M_{BC} = F_{C'B}M_{CB}^{-1} = F_{C'B} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= F_{C'B} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

9.– *Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos el endomorfismo:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x, 2x + y + az, 3x + y + z)$$

(i) *Estudiar en función de los valores de a si f es diagonalizable o triangularizable.*

Para que la matriz triangularice por semejanza la suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores debe de coincidir con el orden de la matriz (3 en este caso). Diagonaliza si además todas las multiplicidades algebraicas coinciden con las geométricas.

Nos ayudará a esto último tener en cuenta que:

$$1 \leq \text{m.geométrica} \leq \text{m.algebraica}$$

y por tanto si la algebraica es 1 la geométrica también y coinciden.

Los autovalores se pueden calcular como las raíces del polinomio característico. Para hallarlo escribimos la matriz asociada a f respecto de la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es:

$$p_f(f\lambda) = |F_C - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & a \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a)$$

Para factorizar resolvemos la ecuación $\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a = 0$:

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-(1-a)} = 1 \pm \sqrt{a}$$

Queda:

$$p_f(\lambda) = \begin{cases} (2-\lambda)(\lambda-(1-\sqrt{a}))(\lambda-(1+\sqrt{a})) \text{ si } a \geq 0 \\ (2-\lambda)\underbrace{(\lambda^2-2\lambda+1-a)}_{\text{sin raíces}} \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Entonces:

- Si $a < 0$ no tiene raíces reales. La única raíz del polinomio característico y por tanto el único autovalor es $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebraica 1. La suma de algebraicas es $1 < dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y por tanto NI triangulariza NI diagonaliza.

- Si $a = 0$ queda $p_f(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$. Los autovalores son:

$\lambda_1 = 2$ con $m.a = 1$.

$\lambda_2 = 1$ con $m.a = 2$.

La suma de algebriacas es $3 = dim(\mathbb{R}^3)$ y por tanto triangulariza.

Como $m.a.(\lambda_1) = 1$ la geométrica también vale 1.

Calculamos la geométrica de $\lambda_2 = 1$:

$$m.g.(1) = 3 - rg(F_C - 1 \cdot Id) = 3 - rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Por tanto triangulariza pero NO diagonaliza.

- Si $a > 0$ y $a \neq 1$ entonces queda $p_f(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-(1-\sqrt{a}))(\lambda-(1+\sqrt{a}))$. . Los autovalores son:

$\lambda_1 = 2$ con $m.a = 1$.

$\lambda_2 = 1-\sqrt{a}$ con $m.a = 1$.

$\lambda_3 = 1+\sqrt{a}$ con $m.a = 1$.

La suma de algebriacas es $3 = dim(\mathbb{R}^3)$ y por tanto triangulariza. Además todas las algebraicas valen 1 y por tanto las geométricas también: coinciden. Así que también diagonaliza.

- Si $a = 1$ entonces queda $p_f(\lambda) = -(2-\lambda)^2\lambda$. Los autovalores son:

$\lambda_1 = 2$ con $m.a = 2$.

$\lambda_2 = 0$ con $m.a = 1$.

Como $m.a.(\lambda_2) = 1$ la geométrica también vale 1.

Calculamos la geométrica de $\lambda_1 = 2$:

$$m.g.(2) = 3 - rg(F_C - 2 \cdot Id) = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Por tanto triangulariza pero NO diagonaliza.

Resumiendo:

- Triangulariza si y sól si $a \geq 0$.

- Diagonaliza si y sólo se $a \geq 0$ y $a \neq 0, 1$.

(ii) *Para $a = 4$, hallar una base B tal que F_B sea diagonal.*

Para $a = 4$ hemos visto que es diagonalizable y los autovalores son:

$\lambda_1 = 2$ con $m.a. = 1$.

$\lambda_2 = 1 - \sqrt{4} = -1$ con $m.a. = 1$.

$\lambda_3 = 1 + \sqrt{4} = 3$ con $m.a. = 1$.

La base B en la cual la matriz asociada es diagonal es la formada por los autovectores. Hallamos los asociados a cada autovalor.

Asociados a $\lambda_1 = 2$:

$$(F_C - 2\lambda Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las ecuaciones:

$$2x - y + 4z = 0 \qquad 3x + y - 2z = 0$$

Resolvemos. Sumando ambas $5x + 2z = 0$, es decir, $z = -5x/2$ y sustituyendo en la primera $y = -8x$. Por tanto:

$$S_2 = \mathcal{L}\{(1, -8, -5/2)\} = \mathcal{L}\{(2, -16, -5)\}$$

Asociados a $\lambda_2 = -1$:

$$(F_C + \lambda Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las ecuaciones (sabemos que sólo hay dos independientes):

$$3x = 0 \qquad 2x + 2y + 4z = 0$$

De la primera $x = 0$, y de la segunda $y = -2z$ Por tanto:

$$S_{-1} = \mathcal{L}\{(0, -2, 1)\}$$

Asociados a $\lambda_3 = 3$:

$$(F_C - 3\lambda Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos las ecuaciones (sabemos que sólo hay dos independientes):

$$-x = 0 \qquad 2x - 2y + 4z = 0$$

De la primera ecuación $x = 0$, y de la segunda $y = 2z$ Por tanto:

$$S_3 = \mathcal{L}\{(0, 2, 1)\}$$

La base B buscada será:

$$B = \{(2, -16, -5), (0, -2, 1), (0, 2, 1)\}$$

(iii) *Calcular a para que $(0, 2, 1)$ sea un autovector de A.*

Para que $(0, 2, 1)$ sea autovector tiene que cumplirse que:

$$f(0, 2, 1) = \lambda(0, 2, 1)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Pero:

$$f(0, 2, 1) = (0, 2 + a, 3)$$

Igualamos:

$$(0, 2 + a, 3) = \lambda(0, 2, 1) \qquad \iff \qquad \begin{cases} 2 + a = 2\lambda \\ 3 = \lambda \end{cases}$$

de donde $\lambda = 3$ y $2 + a = 2 \cdot 3$, es decir, $a = 4$.