Álgebra Lineal I — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **19 de enero de 2024**

1.– Ocho equipos de fútbol, dos españoles, dos ingleses y los demás de países diferentes, se distribuyen en dos grupos de cuatro para organizar una competición.

(i) ¿De cuántas formas distinas pueden quedar repartidos los equipos?.

(ii) ¿Y si en un mismo grupo no pueden ir dos equipos del mismo país?.

(1 punto)

2.– Dado $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{R}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} k \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz P_4 y hallar $det(P_4)$ y $rango(P_4)$ en función de k.

(ii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$ y $rango(P_n)$ en función de n y k.

(1.1 puntos)

3.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar, si existe, una matriz inversible P tal que $PAP^t = B$.

(1 punto)

4.– Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por filas.

(ii) Estudiar para que valores de a, b las matrices son equivalentes por columnas.

(iii) Para los valores de a, b obtenidos en (i) dar una matriz inversible P tal que $PA = B$.

(1.1 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^3$ sean U y V dos subespacios suplementarios. Se sabe que la proyección de $(1, -1, 1)$ sobre U paralelamente a V es $(1, -1, 0)$ y la proyección de $(1, 1, 0)$ sobre V paralelamente a U es $(0, 0, 2)$. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de U y V respecto de la base canónica.

(1 punto)

6.– Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son dos matrices simétricas e inversibles y $traza(A) = traza(B)$ entonces A y B son congruentes.

(ii) Si $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cumplen $det(A) = det(B)$ y $traza(A) = traza(B)$ entonces $rango(A) = rango(B)$.

(iii) Si U, V son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{100}$, con $dim(U) = dim(V) = 60$ entonces $dim(U \cap V) \geq 20$.

(iv) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal cumpliendo $f(1,1) = (1,1)$ y $f(1,2) = (2,2)$ entonces $ker(f) = \{(0,0)\}$.

(1.2 puntos)

7.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Consideramos los siguientes subconjuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{x+1, x^2+1\}, \quad W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1)^2 = p(1)\}$$

(i) Estudiar si U y W son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ en la base canónica.

(iii) Demostrar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iv) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de V en la base B.

(v) ¿Es posible descomponer cualquier vector de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como suma de uno de U y otro de W?¿Es única esa descomposición?.

(1.3 puntos)

8.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se sabe que:

- $f(1,1,1) = Id$.
- $ker(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$.

Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(1.1 puntos)

9.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos el endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x, 2x + y + az, 3x + y + z)$$

(i) Estudiar en función de los valores de a si f es diagonalizable o triangularizable.

(ii) Para $a = 4$, hallar una base B tal que F_B sea diagonal.

(iii) Calcular a para que $(0,2,1)$ sea un autovector de A.

(1.2 puntos)

Álxebra Lineal I — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **19 de xaneiro de 2024**

1.– Oito equipos de fútbol, dous españois, dous ingleses e os demais de países diferentes, distribúense en dous grupos de catro para organizar unha competición.

(i) De cantas formas distinas poden quedar repartidos os equipos?.

(ii) E se nun mesmo grupo non poden ir dous equipos do mesmo país?.

(1 punto)

2.– Dado $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{R}$ defínese a matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} k \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir a matriz P_4 e atopar $det(P_4)$ e $rango(P_4)$ en función de k.

(ii) Para cualquera $n \geq 2$, atopar $det(P_n)$ e $rango(P_n)$ en función de n e k.

(1.1 puntos)

3.– Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Atopar, se existe, unha matriz inversible P tal que $PAP^t = B$.

(1 punto)

4.– Sexan as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Estudiar para que valores de a, b as matrices son equivalentes por filas.

(ii) Estudiar para que valores de a, b as matrices son equivalentes por columnas.

(iii) Para os valores de a, b obtidos en (i) dar unha matriz inversible P tal que $PA = B$.

(1.1 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^3$ sexan U e V dous subespazos suplementarios. Se sabe que a proxección de $(1, -1, 1)$ sobre U paralelamente a V é $(1, -1, 0)$ e a proxección de $(1, 1, 0)$ sobre V paralelamente a U é $(0, 0, 2)$. Calcular as ecuacións paramétricas e implícitas de U e V respecto da base canónica.

(1 punto)

6.– Razoa a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións:

(i) Se $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ son dúas matrices simétricas e inversibles e $traza(A) = traza(B)$ entón A y B son congruentes.

(ii) Se $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cumplen $det(A) = det(B)$ e $traza(A) = traza(B)$ entón $rango(A) = rango(B)$.

(iii) Se U, V son subespazos vectorias de $\mathbb{R}^{100}$, con $dim(U) = dim(V) = 60$ entón $dim(U \cap V) \geq 20$.

(iv) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é unha aplicación lineal cumprindo $f(1,1) = (1,1)$ e $f(1,2) = (2,2)$ entón $ker(f) = \{(0,0)\}$.

(1.2 puntos)

7.– Sxea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que 2. Consideramos os seguintes subconxuntos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1) = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{x+1, x^2+1\}, \quad W = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(1)^2 = p(1)\}$$

(i) Estudiar se U e W son subespazos vectoriais de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Atopar as ecuacións paramétricas é implícitas de $U \cap V$ na base canónica.

(iii) Demostrar que $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ é unha base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(iv) Atopar as ecuacións paramétricas e implícitas de V na base B.

(v) É posible descompoñer calquera vector de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ como suma dun de U e outro de W?¿É única esa descomposición?.

(1.3 puntos)

8.– Dunha aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se sabe que:

- $f(1,1,1) = Id$.
- $ker(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$.

Calcular a matriz asociada a f respecto das bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(1.1 puntos)

9.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos o endomorfismo:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x, 2x + y + az, 3x + y + z)$$

(i) Estudiar en función dos valores de a se f é diagonalizable ou triangularizable.

(ii) Para $a = 4$, atopar unha base B tal que F_B sexa diagonal.

(iii) Calcular a para que $(0,2,1)$ sexa un autovector de A.

(1.2 puntos)
