Álgebra Lineal I — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **20 de enero de 2023**

1.– *Diez amigos alquilan un minibús con 12 plazas para los pasajeros, distribuídas en 4 filas de 3 asientos cada una. Uno de los amigos tendrá que conducir, pero sólo tres de ellos tienen el carnet adecuado para hacerlo.*

(i) *¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en el minibús?.*

Para escoger al conductor hay 3 opciones, ya que sólo tres de los diez amigos pueden conducir.

Después para los 9 restantes, tenemos que contar las formas de elegir 9 asientos entre los 12 disponibles; importa el orden, porque no es lo mismo que en un asiento se siente una u otra persona y no pueden repetirse, porque no puede haber dos personas en el mismo asiento. Son variaciones sin repetición de 12 elementos tomados de 9 en 9.

En definitiva:

$$3 \cdot V_{12,9} = \frac{3 \cdot 12!}{(12-9)!} = 239500800.$$

(ii) *¿En cuántas de ellas ninguna de las 4 filas queda totalmente libre?.*

A las posibilidades totales, restaremos aquellas en las que alguna de las cuatro filas queda libre. Nos fijamos en que si una fila queda libre, quedan 9 asientos para las 9 personas restantes (omitiendo al conductor). Por tanto por cada fila libre hay 9! formas de permutarlas en esos 9 asientos. La cantidad pedida es entonces:

$$TOTAL - 3 \cdot 4 \cdot 9! = 235146240$$

(1 punto)

2.– *Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \ si \ i+j=n+1 \\ 1 \ si \ i+j \neq n+1 \end{cases}$$

(i) *Escribir la matriz P_4 y hallar su determinante.*

La matriz está formada sólo por $1s$ excepto en las posiciones en las que el índice de fila y columna suman $4+1=5$, es decir, en las posiciones $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$ y $(4,1)$, donde vale 0:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar el determinante comenzamos sumando a la primera fila las demás:

$$det(Pn) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Después restamos la primera fila a las otras:

$$det(Pn) = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalmente reordenamos las filas: intercambiamos la 1 y 4 y la 2 y 3. Como son dos cambios el determinante queda multiplicado por $(-1)^2 = 1$:

$$det(Pn) = 3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(-1)^3 = -3.$$

(ii) *Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$ y $traza(P_n)$.*

Por el mismo motivo explicado antes la matriz P_n será de la forma:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Seguimos los mismos pasos para calcular el determinante que en el apartado anterior. Sumamos la primera fila a las demás:

$$|P_n| = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Restamos la primera fila a las otras:

$$|P_n| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalmente reordenamos las filas. Llevamos la última a la primera posición saltando de una en una: son $(n-1)$ cambios. Luego la que quedó abajo (la penúltima) a la segunda posición: son $(n-2)$ cambios. Repitiendo la idea queda:

$$|P_n| = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n(n-1)/2}(n-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^{(n+2)(n-1)/2}(n-1)$$

El exponente $n(n-1)/2$ es la suma de todos los cambios de posición:

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

En cuanto a la traza:

$$traza(P_n) = \sum_{i=1}^{n} (P_n)_{ii}$$

si algún i cumple $i+i=n+1$ entonces esa suma tendría un término cero. Eso ocurre cuando $n+1$ es par e $i=(n+1)/2$. Todos los demás términos son 1. Por tanto:

$$traza(P_n) = \begin{cases} n \text{ si } n+1 \text{ impar} \\ n-1 \text{ si } n+1 \text{ par} \end{cases} = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ par} \\ n-1 \text{ si } n \text{ impar} \end{cases}$$

(1 punto)

3.– *Dadas la matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Hallar, si existe, una matriz inversible* Y *tal que* $YA = B$.

Que exista una matriz inversible Y que multiplicada por la izquierda transforma A en B, corresponde a que sean equivalentes por filas. Para analizar si lo son hallamos y comparamos las formas reducidas canónicas por filas de ambas:

$$A \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(2)H_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B \overset{H_{31}(-2)H_2(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(1)H_{32}(-3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como obtenemos la misma matriz, sí existe Y cumpliendo $YA = B$. Para hallarla hacemos sobre la identidad las mismas operaciones fila que hicimos sobre A y la inversa y en orden opuesto a las hechas sobre B:

$$Id \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(2)H_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_2(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{12}(-1)H_{32}(3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(2)H_2(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Y.$$

(1 punto)

4.– *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *estudiar para qué valores de a y b existe una matriz* $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *inversible tal que* $XAX^t = B$*, dando en esos casos la matriz* X.

Que exista una matriz en las condiciones indicadas equivale a que A y B sean congruentes.

Dado que B es simétrica y la congruencia conserva la simetría, para que sean congruentes A tiene que ser simétrica y por tanto $a = 2$. Una vez que ambas son simétricas para que sean congruentes al diagonalizarlas por congruencia deben de aparecer los mismos signos en la diagonal. Diagonalizar por congruencia consiste en tranformarlas en matrices diagonales haciendo operaciones filas y las mismas en columna:

$$A \overset{H_{21}(-2)\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b-4 \end{pmatrix}$$

y

$$B \overset{H_{12}\,\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que B tiene signos $(+, 0)$. Por tanto para que sean congruentes, si observamos la forma diagonal de A, tiene que cumplirse que $b = 4$.

En resumen son congruentes si y sólo si $a = 2$ y $b = 4$. La matriz X de paso, dado que multiplica por la IZQUIERDA a A, se puede construir haciendo sobre Id las mismas operaciones FILA hechas sobre A y la inversa y en sentido opuesto de las operaciones fila hechas sobre B. No obstante en ese caso y para los valores indicados las dos matrices quedan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es evidente que intercambiando las dos primeras filas y columnas se pasa de una a la otra, por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X.$$

(1 punto)

5.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se consideran los subespacios:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | grado(p(x)) \leq 1\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(0) = 0\}, \quad W = \mathcal{L}\{1 + x^2\}$$

(i) *¿Son U y W subespacios suplementarios?. Descomponer, si es posible, el polinomio $1 + 2x^2$ como suma de un polinomio de U y otro en W. ¿Es única esa descomposición?*

Para que sean suplementarios tiene que cumplirse que $dim(U)+dim(W) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ y $dim(U+W) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ ó $dim(U \cap W) = 0$.

Calculemos las dimensiones de los subespacios implicados. Para ello escribiremos sus ecuaciones o sus generadores respecto a la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$. Recordemos que un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ tiene coordenadas $(a_0, a_1, a_2)_C$ en esa base.

Entonces $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in U$ si $grado(U) \leq 1$. Equivalentemente si $a_2 = 0$. Por tanto:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_2 = 0\}$$

Está definido por una ecuación implícita y así, $dim(U) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))-$n^o ecuaciones$= 3 - 1 = 2$.

Por otra parte $W = \mathcal{L}\{1 + x^2\} = \mathcal{L}\{(1, 0, 1)_C\}$ y por tanto $dim(W) = 1$ por estar generado por un único vector no nulo.

Se cumple la primera condición $dim(U) + dim(W) = 2 + 1 = 3 = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$.

Para hallar $U + W$ calculamos los generadores de U. Para ello a partir de su implícita $a_2 = 0$ es obvio que sus paramétricas son:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad a_2 = 0$$

y $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)_C, (0, 1, 0)_C\}$.

Entonces $U + W = \mathcal{L}\{\underbrace{(1, 0, 0)_C, (0, 1, 0)_C}_{U}, \underbrace{(1, 0, 1)_C}_{W}\}$. Los tres vectores son independientes ya que el rango de su matriz de coordenadas es 3:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Deducimos que $dim(U + W) = 3$ y efectivamente son subespacios suplementarios.

Por ser suplementarios todo vector se descompone de manera única como suma de uno en U y otro en W. Para hacer esa descomposición para el vector $1 + 2x^2 = (1, 0, 2)_C$ lo escribimos en la base:

$$B = \{\underbrace{(1, 0, 0)_C, (0, 1, 0)_C}_{U}, \underbrace{(1, 0, 1)_C}_{W}\}.$$

Lo hacemos mediante un cambio de base:

$$M_{BC}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = M_{CB}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$(1,0,2)_C = (-1,0,2)_B = \underbrace{-1(1,0,0)_C + 0(0,1,0)_C}_{U} + \underbrace{2(1,0,1)_C}_{W} = \underbrace{(-1,0,0)_C}_{U} + \underbrace{(2,0,2)_C}_{W}, = \underbrace{-1}_{U} + \underbrace{2+2x^2}_{W}$$

(ii) *¿Son U y V subespacios suplementarios?. Descomponer, si es posible, el polinomio $1+2x^2$ como suma de un polinomio de U y otro en V. ¿Es única esa descomposición?*

Hacemos una análisis similar al apartado anterior. Tenemos que calcular $dim(V)$:

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V$ si $p'(0) = 0$. Pero $p'(x) = a_1 + 2a_2x$ y $p'(0) = a_1$. Por tanto:

$$V = \{(a_0, a_1, a_2)_C \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | a_1 = 0\}$$

y como antes $dim(V) = 2$. Pero entonces $dim(U) + dim(V) = 2 + 2 = 4 \neq dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ y por tanto NO son suplementarios.

Podemos ver si todo vector se descompone como suma de un en U y otro en V, calculando $dim(U+V)$. De la ecuación implícita de V es inmediato que sus paramétricas son:

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \beta.$$

y

$$V = \mathcal{L}\{(1,0,0)_C, (0,0,1)_C\}$$

Entonces:

$$U + V = \mathcal{L}\{\underbrace{(1,0,0)_C, (0,1,0)_C}_{U}, \underbrace{(1,0,0)_C, (0,0,1)_C}_{V}\} = \mathcal{L}\{(1,0,0)_C, (0,1,0)_C, (0,0,1)_C\} = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Deducimos que todo vector se escribe como suma de uno en U y otro en V. Dado que NO son suplementarios esa descomposición NO es única.

En este caso por ejemplo:

$$1 + 2x^2 = (1,0,2)_C = \underbrace{(1,0,0)_C}_{U} + \underbrace{(0,0,2)_C}_{V} = \underbrace{(0,0,0)_C}_{U} + \underbrace{(1,0,2)_C}_{V}.$$

(1.3 puntos)

6.– *Dada la aplicación:*

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad f(A) = (traza(A), traza(A + A^t))$$

(i) *Probar que f es lineal.*

Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $s, t \in \mathbb{R}$ tenemos que comprobar que $f(sA + tB) = sf(A) + tf(B)$. Por simplificar notamos que

$$traza(A + A^t) = traza(A) + traza(A^t) = traza(A) + traza(A) = 2traza(A)$$

y por tanto en realidad $f(A) = (tr(A), 2tr(A))$. Pero:

$$f(sA + tB) = (tr(sA + tB), 2tr(sA + tB)) = (s \cdot tr(A) + t \cdot tr(B), 2s \cdot tr(A) + 2t \cdot tr(B))$$
$$sf(A) + tf(B) = s(tr(A), 2tr(A)) + t(tr(B), 2tr(B)) = (s \cdot tr(A) + t \cdot tr(B), 2s \cdot tr(A) + 2t \cdot tr(B))$$

(ii) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$.*

La base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es:

$$C = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y la de $\mathbb{R}^2$, $C_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Queremos calcular F_{C_2C}. Para ello tomamos los vectores de C, hallamos sus imágenes y los expresamos en la base de llegada. Las coordenadas obtenidas puestas en columna forman la matriz pedida:

$$\begin{aligned} f(E_1) &= (traza(E_1), 2traza(E_1)) = (1, 2) = (1, 2)_C \\ f(E_2) &= (traza(E_2), 2traza(E_2)) = (0, 0) = (0, 0)_C \\ f(E_3) &= (traza(E_3), 2traza(E_3)) = (0, 0) = (0, 0)_C \\ f(E_4) &= (traza(E_4), 2traza(E_4)) = (1, 2) = (1, 2)_C \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$F_{C_2C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Usando la matriz asociada calculada en el apartado anterior, hallar $f(Id)$.*

Tenemos que:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 1)_C$$

Entonces:

$$f(Id) = F_{C_2C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$f(Id) = (2, 4)_C = (2, 4).$$

(iv) *Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $ker(f)$ respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

El núcleo está formada por los vectores cuya imagen es nula. Equivalentemente por las matrices de coordenadas $(x, y, z, t)_C$ que cumplen:

$$F_{C_2C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente:

$$x + t = 0, \quad 2x + 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + t = 0.$$

Esa es la ecuación implícita del núcleo. Para las paramétrias resolvemos en función de $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) - 1 = 4 - 1 = 3$ parámetros. Queda:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad t = -\alpha.$$

(v) *Demostrar que los siguientes vectores forman una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$,*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dado que B tiene tantos vectores como $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, para ver que es base es suficiente comprobar que sus vectores son independientes; equivalentemente que la matriz que forman sus coordenadas tiene rango 4:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$$

(vi) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y $B' = \{(0,1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_{B'B} = M_{B'C_2} F_{C_2C} M_{CB} = M_{C_2B'}^{-1} F_{C_2C} M_{CB}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_{C_2B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$F_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1.3 puntos)

7.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Una matriz 2×2 con dos autovalores reales distintos siempre es diagonalizable por semejanza.*

VERDADERO. Cada uno de ellos tendrá multiplicidad algebraica 1, porque la suma de algebraicas no puede superar el tamaño de la matriz. Por tanto la geométrica también será 1 ya que:

$$1 \leq \text{m.geométrica} \leq \text{m.algebraica}$$

Entonces la suma de algebraicas coincide con el orden de la matriz y algebraicas y geométricas son iguales: diagonaliza.

(ii) *Dos matrices congruentes son equivalentes por filas.*

FALSO. Por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son congruentes, porque son diagonales con los mismos signos en la diagonal. Pero no son equivalentes por filas, porque la primera tiene ceros en la segunda columna, que combinados con operaciones fila solo darán ceros: es imposible obtener el 1 que la otra matriz tiene en la posición $2, 2$.

(iii) *El conjunto de matrices $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) < 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*

FALSO. Si tomamos $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $X, Y \in \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) < 2\}$, porque $rango(X) = rango(Y) = 1 < 2$. Sin embargo $rango(X + Y) = rango(Id) = 2$ y por tanto $X + Y \notin \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) < 2\}$.

(iv) *Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una aplicación lineal cumpliendo $f(1, 0, 0, 1) = f(1, 0, 0, 0)$, entonces $dim(Im(f)) < 4$.*

VERDADERO. Si $f(1, 0, 0, 1) = f(1, 0, 0, 0)$, entonces por linealidad:

$$f((1, 0, 0, 1) - (1, 0, 0, 0)) = f(1, 0, 0, 1) - f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Luego $(1, 0, 0, 1) - (1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 1) \in ker(f)$ y $dim(ker(f)) > 0$. Por tanto:

$$dim(Im(f)) = 4 - dim(ker(f)) < 4 - 0 = 4.$$

(1.2 puntos)

8.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:*

$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z-t = 0,\ x+y-z+t = 0,\ z-t = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 1), (1, 0, 2, 2), (1, 0, 0, 0)\}$

(i) *Calcular $dim(U), dim(V), dim(U + V)$ y $dim(U \cap V)$.*

El subespacio U viene dado por ecuaciones implícitas. Analizamos si son independientes escalonando la matriz formada por sus coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos que las ecuaciones dadas equivalen a dos ecuaciones independientes:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z - t = 0,\ z - t = 0\}$$

y entonces $dim(U) = dim(\mathbb{R}^4) -$ n^o de ecuaciones$= 4 - 2 = 2$.

El subespacio V dado por generadores, tendrá por dimensión el número de ellos que son linealmente independientes. Esto coincide con el rango de la matriz de coordenadas de los vectores dados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deducimos que $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ y $dim(V) = 2$.

Para hallar $dim(U + V)$, calculamos un sistema de generadores de U, ya que $U + V$ está generado por la unión de una base de cada uno de los dos subespacios. Pasamos primero de las implícitas de U a paramétricas, resolviendo el sistema de ecuaciones que lo definen:

$$\begin{aligned} x + y + z - t &= 0 \\ z - t &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad z = t, \quad y = -x.$$

Las paramétricas son:

$$x = a, \quad y = -a, \quad z = b, \quad t = b$$

y por tanto $U = \mathcal{L}\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

Ahora:

$$U+V = \mathcal{L}\{\underbrace{(1,-1,0,0),(0,0,1,1)}_{U},\underbrace{(1,0,0,0),(0,0,1,1)}_{V}\} = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)\}$$

Comprobamos si esos tres vectores son independientes:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

y entonces $dim(U+V) = 3$. Finalmente, por la fórmula de las dimensiones:

$$dim(U\cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V) = 2+2-3 = 1.$$

(ii) *Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U\cap V$ respecto de la base canónica.*

Comenzamos calculando las implícitas de V. Dado que $V = \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,0,1,1)\}$, sus paramétricas son:

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = b, \quad t = b.$$

Elimando parámetros nos quedarán $4-2 = 2$ ecuaciones implícitas:

$$y = 0, \quad z - t = 0.$$

Ahora las ecuaciones de la intersección de $U\cap V$ son las de ambos subespacios unidas:

$$U \equiv \begin{cases} x+y+z-t = 0 \\ z-t = 0 \end{cases}$$
$$V \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z-t = 0 \end{cases}$$

Eliminamos la ecuación repetida. Sabemos que n^o de ecuaciones$= dim(\mathbb{R}^4) - dim(U\cap V) = 4-1 = 3$, por tanto las tres restantes son independientes:

$$x+y+z-t = 0, \qquad y = 0, \qquad z-t = 0.$$

Para hallar las paramétricas resolvemos el sistema en función de $dim(U\cap V) = 1$ parámetros:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = a, \quad t = a.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de V en la base:*

$$B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\}.$$

Escribimos las implícitas de V en forma matricial:

$$\begin{matrix} y = 0 \\ z-t = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (*).$$

Usamos la fórmula de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_C = M_{CB}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B, \text{ con } M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Reemplazamos en (∗):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$x' - y' = 0$$
$$2t' = 0$$

o simplifcando:

$$x' - y' = 0$$
$$t' = 0$$

(iv) *Hallar las ecuaciones implícitas de un subespacio W de manera que V y W sean suplementarios.*

Hemos visto que $dim(V) = 2$. Para que W y V sean suplementarios es necesario y suficiente que se cumpla:

i) $dim(W) + dim(V) = dim(\mathbb{R}^4)$

ii) $dim(W + V) = dim(\mathbb{R}^4)$.

Como $dim(V) = 2$ y $dim(\mathbb{R}^4) = 4$, de la primera condición $dim(W) = 2$. Por tanto W estará generado por dos vectores.

Para que además se cumpla la segunda condición, los dos vectores junto con los generadores de V deben de ser independientes y sus coordenadas formar una matriz de rango 4.

En concreto: $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. Por tanto si tomamos $W = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene rango 4, y se cumple la segunda condición.

Finalmente hallamos la implícitas de W. Las paramétricas son:

$$x = 0, \quad y = a, \quad z = 0, \quad t = b.$$

Y eliminado parámetros, las implícitas:

$$x = 0, \quad z = 0.$$

(1 punto)

9.– *Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -a & 2 & 1 \end{pmatrix}$:*

(i) *Estudiar en función de los valores de a si la matriz A diagonaliza y/o triangulariza por semejanza.*

Para que la matriz triangularice por semejanza la suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores debe de coincidir con el orden de la matriz (3 en este caso). Diagonaliza si además todas las multiplicidades algebraicas coinciden con las geométricas.

Nos ayudará a esto último tener en cuenta que:

$$1 \leq \text{m.geométrica} \leq \text{m.algebraica}$$

y por tanto si la algebraica es 1 la geométrica también y coinciden.

Los autovalores se pueden calcular como las raíces del polinomio característico. Comenzamos hallando éste:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ -a & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (a-\lambda)((1-\lambda)^2 - 2^2) = (a-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (a-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)$$

Vemos que:

1) Si $a \neq -1, 3$ tenemos tres autovalores distintos $a, -1, 3$, todos ellos con multiplicidad algebraica uno. La suma de ellas es tres: triangulariza. Pero como la algebraica de todos ellos es 1 la geométrica también: coinciden y diagonaliza.

2) Si $a = -1$ tenemos:

$\lambda_1 = 3$ con multiplicidad algebraica 1. La geométrica es 1 también.

$\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica 2. La geométrica es:

$$m.g(-1) = 3 - rg(A - (-1)Id) = 3 - rg\begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 & 0 \\ 1 & 1-(-1) & 2 \\ 1 & 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} =$$
$$= rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

La suma de algebraicas es 3 y todas las geométricas y algebraicas coinciden: triangulariza y diagonaliza por semejanza.

3) Si $a = 3$ tenemos:

$\lambda_1 = -1$ con multiplicidad algebraica 1. La geométrica es 1 también.

$\lambda_2 = 3$ con multiplicidad algebraica 2. La geométrica es:

$$m.g(3) = 3 - rg(A - 3 \cdot Id) = 3 - rg\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 1 & 1-3 & 2 \\ -3 & 2 & 1-3 \end{pmatrix} = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

La suma de algebraicas es 3: triangulariza. Sin embargo en este caso $m.g.(3) = 1 \neq 2 = m.a(3)$, luego NO diagonaliza.

Conclusión: triangulariza siempre. Diagonaliza si y sólo si $a \neq 3$.

(ii) *Para $a = -1$, hallar una matriz P inversible y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.*

Para $a = -1$ hemos visto que la matriz diagonaliza por semejanza y por tanto existen las matrices P, D pedidas. La matriz D es la matriz que tiene en la diagonal los autovalores, repetidos tantas veces como indica su multiplicidad:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz P es aquella que tiene por columnas los correspondientes autovectores asociados a cada autovalor.

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 3$.

$$(A - 3Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Quedan las ecuaciones independientes:

$$-4x = 0, \quad x - 2y + 2z = 0$$

y resolviendo:

$$x = 0, \quad y = k, \quad z = k$$

Por tanto $S_3 = \mathcal{L}\{(0,1,1)\}$.

Ahora los autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$.

$$(A - (-1)Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Quedan las ecuación independiente:

$$x + 2y + 2z = 0$$

y resolviendo paramétricamente:

$$x = -2p - 2q, \quad y = p, \quad z = q$$

Por tanto $S_{-1} = \mathcal{L}\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}$.

La matriz P buscada es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Calcular a para que* $traza(A^5) = 210$.

Dado que la traza se conserva por semejanza, la traza de una matriz triangularizable coincide con la suma de sus autovalores; los autovalores de la potencia de una matriz, son la potencia de los autovalores de la matriz original. Por tanto:

$$210 = traza(A^5) = a^5 + (-1)^5 + 3^5$$

Queda:

$$a^5 = -32 = (-2)^5 \quad a = -2.$$

(1.2 puntos)