Álgebra Lineal I		**Examen Final**
Ejercicio único	(3 horas)	**20 de enero de 2023**

1.– Diez amigos alquilan un minibús con 12 plazas para los pasajeros, distribuídas en 4 filas de 3 asientos cada una. Uno de los amigos tendrá que conducir, pero sólo tres de ellos tienen el carnet adecuado para hacerlo.

(i) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en el minibús?.

(ii) ¿En cuántas de ellas ninguna de las 4 filas queda totalmente libre?.

(1 punto)

2.– Dado $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i+j = n+1 \\ 1 \text{ si } i+j \neq n+1 \end{cases}$$

(i) Escribir la matriz P_4 y hallar su determinante.

(ii) Para cualquier $n \geq 2$, hallar $det(P_n)$ y $traza(P_n)$.

(1 punto)

3.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar, si existe, una matriz inversible Y tal que $YA = B$.

(1 punto)

4.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ estudiar para qué valores de a y b existe una matriz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ inversible tal que $XAX^t = B$, dando en esos casos la matriz X.

(1 punto)

5.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2. Se consideran los subespacios:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | grado(p(x)) \leq 1\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(0) = 0\}, \quad W = \mathcal{L}\{1 + x^2\}$$

(i) ¿Son U y W subespacios suplementarios?. Descomponer, si es posible, el polinomio $1 + 2x^2$ como suma de un polinomio de U y otro en W. ¿Es única esa descomposición?

(ii) ¿Son U y V subespacios suplementarios?. Descomponer, si es posible, el polinomio $1 + 2x^2$ como suma de un polinomio de U y otro en V. ¿Es única esa descomposición?

(1.3 puntos)

6.– Dada la aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad f(A) = (traza(A), traza(A + A^t))$$

(i) Probar que f es lineal.

(ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$.

(iii) Usando la matriz asociada calculada en el apartado anterior, hallar $f(Id)$.

(iv) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $ker(f)$ respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(v) Demostrar que los siguientes vectores forman una base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(vi) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y $B' = \{(0,1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(1.3 puntos)

7.– Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

(i) Una matriz 2×2 con dos autovalores reales distintos siempre es diagonalizable por semejanza.

(ii) Dos matrices congruentes son equivalentes por filas.

(iii) El conjunto de matrices $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) < 2\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Si $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una aplicación lineal cumpliendo $f(1,0,0,1) = f(1,0,0,0)$, entonces $dim(Im(f)) < 4$.

(1.2 puntos)

8.– En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z-t = 0,\ x+y-z+t = 0,\ z-t = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1,0,1,1),(1,0,2,2),(1,0,0,0)\}$$

(i) Calcular $dim(U), dim(V), dim(U+V)$ y $dim(U \cap V)$.

(ii) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $U \cap V$ respecto de la base canónica.

(iii) Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de V en la base:

$$B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\}.$$

(iv) Hallar las ecuaciones implícitas de un subespacio W de manera que V y W sean suplementarios.

(1 punto)

9.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -a & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

(i) Estudiar en función de los valores de a si la matriz A diagonaliza y/o triangulariza por semejanza.

(ii) Para $a = -1$, hallar una matriz P inversible y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(iii) Calcular a para que $traza(A^5) = 210$.

(1.2 puntos)

Álxebra Lineal I		**Exame Final**
Exercicio único	(3 horas.)	**20 de xaneiro de 2023**

1.– Dez amigos alugan un minibús con 12 asentos para os pasaxeiros, distribuídas en 4 filas de 3 asentos cada unha. Un dos amigos terá que conducir, pero só tres deles teñen o carné adecuado para facelo.

(i) De cantas formas distintas poden sentarse no minibús?.

(ii) En cantas delas ningunha das 4 filas queda totalmente libre?.

(1 punto)

2.– Dado $n \in \mathbb{N}$ defínese a matriz $P_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$(P_n)_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i+j = n+1 \\ 1 \text{ se } i+j \neq n+1 \end{cases}$$

(i) Escribir a matriz P_4 e atopar o seu determinante.

(ii) Para calquera $n \geq 2$, atopar $det(P_n)$ e $traza(P_n)$.

(1 punto)

3.– Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Atopar, se existe, unha matriz invertible Y tal que $YA = B$.

(1 punto)

4.– Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a e b existe unha matriz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ invertible tal que $XAX^t = B$, dando neses casos a matriz X.

(1 punto)

5.– Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de polinomios de grao menor ou igual que 2. Considéranse os subespazos:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | grao(p(x)) \leq 1\}, \quad V = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p'(0) = 0\}, \quad W = \mathcal{L}\{1 + x^2\}$$

(i) Son U e W espazos suplementarios? Descompoñer, se é posible, o polinomio $1 + 2x^2$ como suma de un polinomio de U e outro en W. É única esa descomposición?

(ii) Son V e W espazos suplementarios? Descompoñer, se é posible, o polinomio $1 + 2x^2$ como suma de un polinomio de V e outro en W. É única esa descomposición?

(1.3 puntos)

6.– Dada a aplicación:

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad f(A) = (traza(A), traza(A + A^t))$$

(i) Probar que f é lineal.

(ii) Atopar a matriz asociada a f respecto das bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$.

(iii) Usando a matriz asociada calculada no apartado anterior, atopar $f(Id)$.

(iv) Calcular as ecuacións paramétricas e implícitas de $ker(f)$ respecto da base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(v) Demostrar que os seguintes vectores forman unha base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(vi) Atopar a matriz asociada a f respecto das bases B de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e $B' = \{(0,1),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(1.3 puntos)

7.– Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes cuestións:

(i) Unha matriz 2×2 con dous autovalores reales distintos sempre é diagonalizable por semellanza.

(ii) Dúas matrices congruentes son equivalentes por filas.

(iii) O conxunto de matrices $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) | rango(A) < 2\}$ é un subespazo vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iv) Se $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é unha aplicación lineal cumprindo $f(1,0,0,1) = f(1,0,0,0)$, entón $dim(Im(f)) < 4$.

(1.2 puntos)

8.– No espazo vectorial $\mathbb{R}^4$ considéranse os subespazos vectoriais:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z-t = 0,\ x+y-z+t = 0,\ z-t = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(1,0,1,1),(1,0,2,2),(1,0,0,0)\}$$

(i) Calcular $dim(U), dim(V), dim(U+V)$ e $dim(U \cap V)$.

(ii) Calcular as ecuacións paramétricas e implícitas de $U \cap V$ respecto da base canónica.

(iii) Atopar as ecuacións paramétricas e implícitas de V na base:

$$B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\}.$$

(iv) Atopar as ecuacións implícitas dun subespazo W de maneira que V e W sexan suplementarios.

(1 punto)

9.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -a & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

(i) Estudiar en función dos valores de a se a matriz A diagonaliza e/ou triangulariza por semellanza.

(ii) Para $a = -1$, atopar unha matriz P inversible e unha matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(iii) Calcular a para que $traza(A^5) = 210$.

(1.2 puntos)
