UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

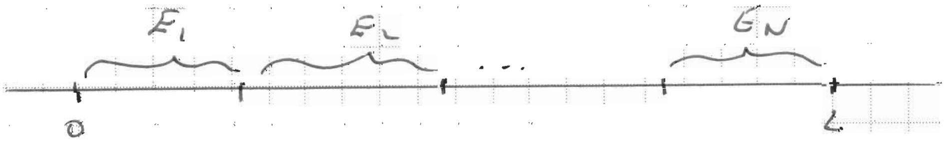
Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

Metodo de Elementos Finitos

Discretización del Dominio

$$\left\{\begin{array}{l} [0,L] = \bigcup_{e=1}^{N} E_e \\ \mathring{E}_e \cap \mathring{E}_f = \emptyset \quad \forall e \neq f \end{array}\right\} \Rightarrow E_e \equiv \text{elemento finito nº } e$$

Eg.:



Efecto: la integración puede realizarse elemento a elemento

$$\underset{\sim}{K} = a(\bar{w}, \bar{\phi}^T) = \int_0^L \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}^T A\,dx = \sum_{e=1}^{N} \int_{E_e} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} E \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}^T A\,dx$$

$$\bar{f} = (\bar{w}, f)_{+\bar{w}(L)F} = \int_0^L \bar{w}\, b\, A\,dx + \bar{w}(L) F = \sum_{e=1}^{N} \int_{E_e} \bar{w}\, b\, A\,dx + \bar{w}(L) F$$

Matriz de Rigidez de Elemento

$$\hat{\underset{\sim}{K}}^e = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} E \frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial x} A\,dx = a(\bar{w}, \bar{\varphi}^T)_e \equiv \text{contribución del elemento } e$$

$$\bar{K} = \sum_{e=1}^{N} \hat{\underset{\sim}{K}}^e \quad ; \quad \hat{\underset{\sim}{K}}^e = [\hat{k}^e_{ji}] \quad ; \quad \hat{k}^e_{ji} = a(w_j, \varphi_i)_e$$

$$= \int_{\Omega_e} \frac{\partial w_j}{\partial x} E \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} A\,dx$$

Vector de Fuerzas de Elemento

$$\hat{f}^e = \int_{\Omega_e} \bar{w}\, b\, A\,dx = (\bar{w}, b)_e \equiv \text{contribución del elemento } e$$

$$\bar{f} = \sum_{e=1}^{N} \hat{f}^e + \bar{w}(L)F \; ; \quad \hat{f}^e = [\hat{f}^e_j] \quad ; \quad \hat{f}^e_j = (w_j, b)_e = \int_{\Omega_e} w_j\, b\, A\,dx$$

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

OBSERVACIÓN

Si se eligen las funciones $\begin{cases} \text{de prueba} & \phi_i(x) \\ \text{de test} & w_j(x) \end{cases}$ de forma que tengan soporte local $\Rightarrow$

1) Cada $\begin{Bmatrix} \phi_i(x) \\ w_j(x) \end{Bmatrix}$ será nula en la mayor parte de los elementos E_e
2) La mayor parte de las contribuciones $\begin{Bmatrix} \hat{K}_{ji}^e \\ \hat{f}_j^e \end{Bmatrix}$ serán nulas
3) Es posible que la mayor parte de los términos $\{K_{ji}\}$ sean nulos

NOTAS:

2) $\Rightarrow$ FUERTE REDUCCIÓN DEL TIEMPO DE CÁLCULO DE INTEGRACIÓN
3) $\Rightarrow$ MATRIZ 'SPARSE' $\rightarrow$
   - almacenamiento eficaz
   - solución eficaz del sistema

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

ORGANIZACIÓN GLOBAL

C..... MATRIZ DE RIGIDEZ

do $j = 0, n$

  do $i = 0, n$

    $K_{ji} = 0.$

    do $e = 1, N$

      CALCULAR $\hat{K}_{ji}^{e}$

      ENSAMBLAR $K_{ji} = K_{ji} + \hat{K}_{ji}^{e}$ (*)

    enddo

  enddo

enddo

C..... VECTOR DE FUERZAS

do $j = 0, n$

  $f_j = w_j(L) \cdot F$

  do $e = 1, N$

    CALCULAR $\hat{f}_j^{e}$

    ENSAMBLAR $f_j = f_j + \hat{f}_j^{e}$

  enddo

enddo

(*) Resulta fácil {comprobar / razonar} que muchas K_{ji} serán nulas

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

ORGANIZACIÓN POR ELEMENTOS

```
C.....  MATRIZ DE RIGIDEZ Y VECTOR DE FUERZAS

C.....  INICIALIZAR
        do j=0,n
           f_j = w_j(L) F
           do i=0,n
              K_ji=0.
           enddo
        enddo

C.....  BUCLE SOBRE ELEMENTOS
        do e=1,N
           do j=0,n
              CALCULAR  f^_j^e
              ENSAMBLAR f_j = f_j + f^_j^e
              do i=j,n
                 CALCULAR  K^_ji^e
                 ENSAMBLAR K_ji = K_ji + K^_ji^e
              enddo
           enddo                                   (*)
        enddo
```

(*) Resulta fácil programar / implementar y que no hay que calcular los términos $\hat{K}_{ji}^e$, $\hat{f}_j^e$ que son nulos

CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LAS FUNCIONES DE PRUEBA

1) CONCEPTO DE NODO:

Elegimos los puntos $\{x_k\}_{k=0,\dots,n}$

y definimos las funciones de prueba $\{\phi_i(x)\}_{i=0,\dots,n}$ de forma que

$\boxed{\alpha_k = u^h(x_k)}$: la incógnita α_i es el valor de la solución en el nodo i-ésimo $\Rightarrow$ FÁCIL INTERPRETACIÓN

Este efecto se consigue si $\phi_i(x_k) = \delta_{ik} \Rightarrow u^h(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \delta_{ik}\alpha_k = \alpha_k$

$\Rightarrow$ "A cada nodo le corresponde una función de prueba que verifica

$$\begin{cases} \phi_i(x_k) = 0 \text{ si } i \neq k \\ \phi_i(x_i) = 1 \end{cases}$$

2) SOPORTE LOCAL

$\left.\begin{matrix} \phi_i(x) = 0 \\ w_j(x) = 0 \end{matrix}\right\}$ cuando $x \in$ la mayor parte de los elementos $E_e \Rightarrow$

– Sólo es necesario calcular las contribuciones

$\begin{Bmatrix} \hat{k}_{ji}^e \\ \hat{f}_j^e \end{Bmatrix}$ para los nodos i, j tales que $\begin{cases} \phi_i(x) \neq 0 \text{ en } E_e \\ w_j(x) \neq 0 \text{ en } E_e \end{cases}$

– Son nulos los coeficientes

$k_{ji} = 0$ para los nodos i, j tales que $\left.\begin{cases} \phi_i(x) = 0 \\ w_j(x) = 0 \end{cases}\right\} \forall E_e$

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:
Materia:
Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

3) PARTICIÓN DE LA UNIDAD

$u^h(x)$ debe poder representar exactamente la función $u(x) = cte. \Rightarrow$

$$\alpha_k = u^h(x_k) = cte \rightsquigarrow u^h(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \phi_i(x) = cte \cdot \sum_{i=0}^{n} \phi_i(x) = cte$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n} \phi_i(x) = 1}$$

De esta forma, $\alpha_k = \alpha \quad k = 0, \dots, n \Rightarrow u^h(x) = \alpha \quad x \in [0, L]$

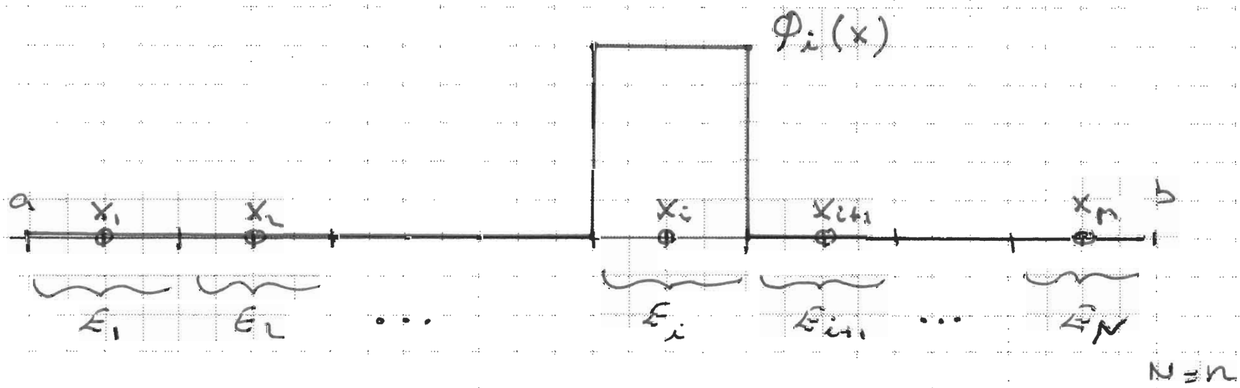
$$\Rightarrow \varepsilon^h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^h(x) = 0$$

¡¡¡ De lo contrario los movimientos de sólido rígido producirían deformaciones y tensiones !!!

Ejemplos (Bubnov Galerkin)

Elementos de 1 nodo (*)

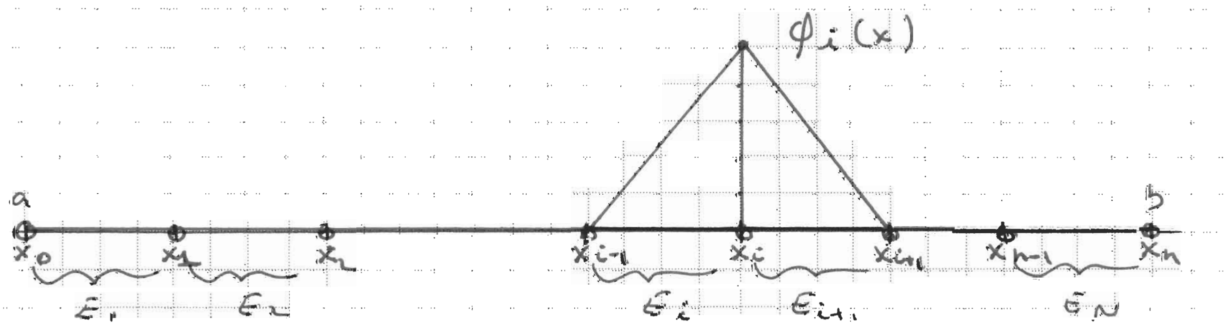


$\Rightarrow$ $u^h(x)$ es una función en escalón $\rightarrow H^0$

$\underset{\sim}{K}$ es diagonal

$\Rightarrow$ NO SE PUEDEN USAR PARA ESTE PROBLEMA, PUES $u^h(x) \notin H^1$

Elementos de 2 nodos



$\Rightarrow$ $u^h(x)$ es una función poligonal a trozos ($\mathcal{C}^0$) $\rightarrow H^1$

$\underset{\sim}{K}$ es tridiagonal simétrica (semiancho de banda = 1)

(*) numeramos los nodos y las funciones de prueba desde 1 hasta n

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

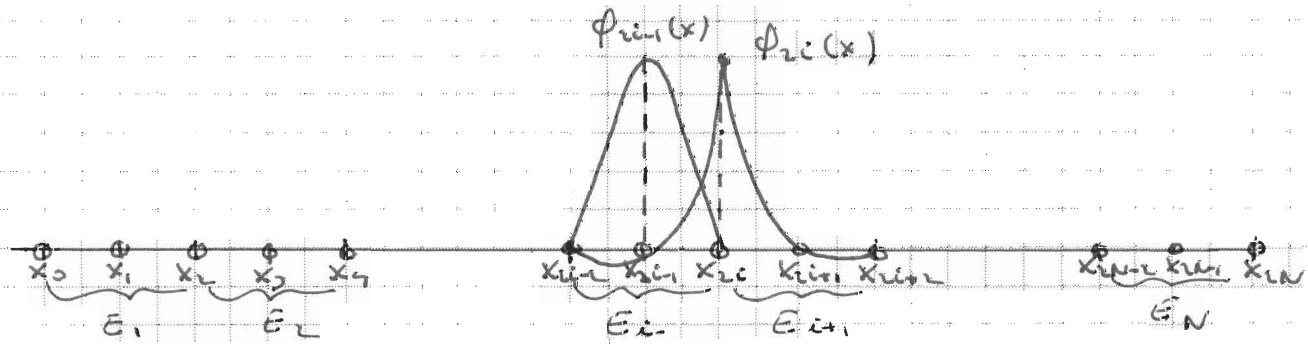
Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

---

elementos de 3 nodos



$\Rightarrow$ $u^h(x)$ es una función parabólica a trozos (C^0) $\rightarrow H^1$

$\underset{\sim}{K}$ es pentadiagonal simétrica (semiancho de banda = 2)

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

OBSERVACIÓN

Relacionando nodos con elementos, debe ser posible sistematizar la discusión sobre que términos

$$\hat{k}_{ij}^{e}, \quad \hat{f}_{j}^{e}$$

es preciso calcular para cada elemento e.

$$\Downarrow$$

FUNCIONES DE FORMA

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

*ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS*

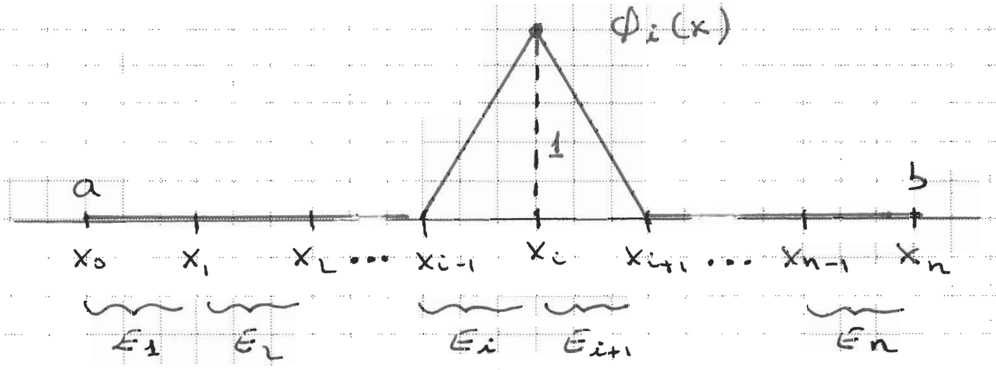
Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

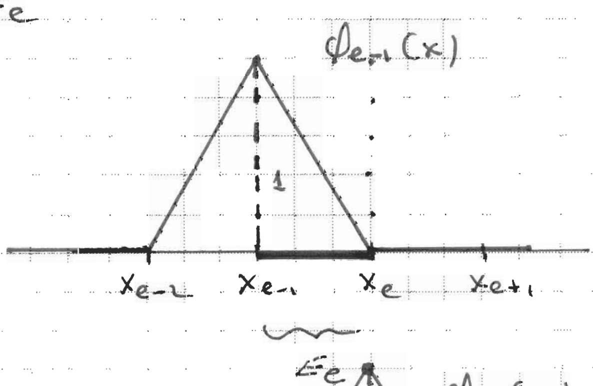
FUNCIONES DE FORMA

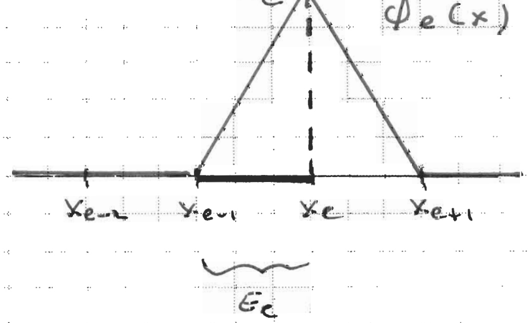
Ej: elementos de 2 nodos



$N = n$

$\Rightarrow$ Sólo hay dos funciones de prueba no nulas en el elemento E_e





PERSPECTIVA LOCAL DEL ELEMENTO

Luego las contribuciones no nulas del elemento e son:

$$\hat{k}^e_{j,e-1} \qquad \hat{k}^e_{je} \qquad j=0,\ldots,n$$

Si se utiliza el método de Bubnov-Galerkin $(w_j(x)=\phi_j(x))$,

las contribuciones no nulas del elemento e son:

$$f^e = \begin{Bmatrix} \hat{f}^e_{e-1} \\ \hat{f}^e_e \end{Bmatrix} \quad \leftarrow \quad j=e-1,e$$

$$\underset{\sim}{k}^e = \begin{bmatrix} \hat{k}^e_{e-1,e-1} & \hat{k}^e_{e-1,e} \\ \hat{k}^e_{e,e-1} & \hat{k}^e_{e,e} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \quad \begin{cases} j=e-1,e \\ i=e-1,e \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Suficiente trabajar con numeración local y coordenadas locales (de referencia)

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

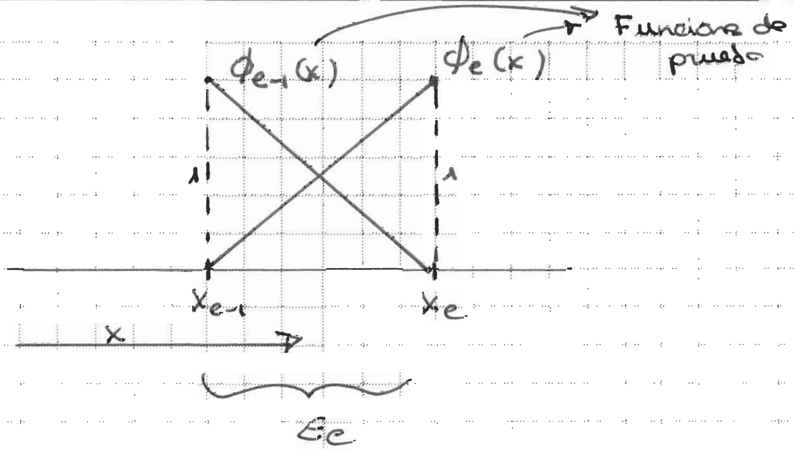
Nome / *Nombre*:

Materia:

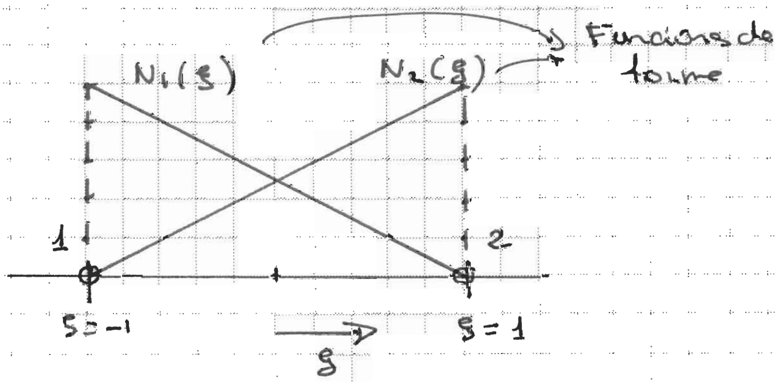
Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

ELEMENTO MAESTRO

Coordenada Material: x



Coordenada de Referencia: ξ



$\Rightarrow$ Dentro del elemento E_e: $u^h(x) = \alpha_{e-1}\,\phi_{e-1}(x) + \alpha_e\,\phi_e(x)$

$$= \alpha_{e-1}\,N_1(\xi) + \alpha_e\,N_2(\xi)$$

$\Rightarrow$ Es necesario definir una transformación de coordenada $\xi \leftrightarrow x$,

$x = x(\xi)$ que verifique $\begin{cases} x(-1) = x_{e-1} \\ x(1) = x_e \\ \dfrac{dx}{d\xi} \neq 0 \quad \forall \xi \in (-1,1) \end{cases}$

$\Downarrow$

INTERPOLACIÓN GEOMÉTRICA.

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

*ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS*

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

<u>ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS</u> (INT. GEOMÉTRICA = INT. FUNCIONAL)

$$x(\xi) = x_{e-1}\, N_1(\xi) + x_e\, N_2(\xi)$$

<u>NUMERACIÓN LOCAL</u>

NODO GLOBAL $\begin{Bmatrix} e-1 \\ e \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$ NODO LOCAL $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ del elemento e

luego $\begin{cases} x_{e-1} = x_1^e \\ x_e = x_2^e \end{cases}$

<u>INTERPOLACIÓN ISOPARAMÉTRICA DE CUALQUIER MAGNITUD</u>

Conocida la propiedad/magnitud p en los nodos, $\{p_i\}_{i=0,\dots,n}$

interpolamos:

- NOTACIÓN GLOBAL $\quad p^h(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i\, \phi_i(x)$
- NOTACIÓN LOCAL $\quad \begin{cases} x \in E_e \\ p^h(\xi) = p_1^e\, N_1(\xi) + p_2^e\, N_2(\xi) \end{cases}$

Folla / *Hoja*: /

Data / *Fecha*: / /

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

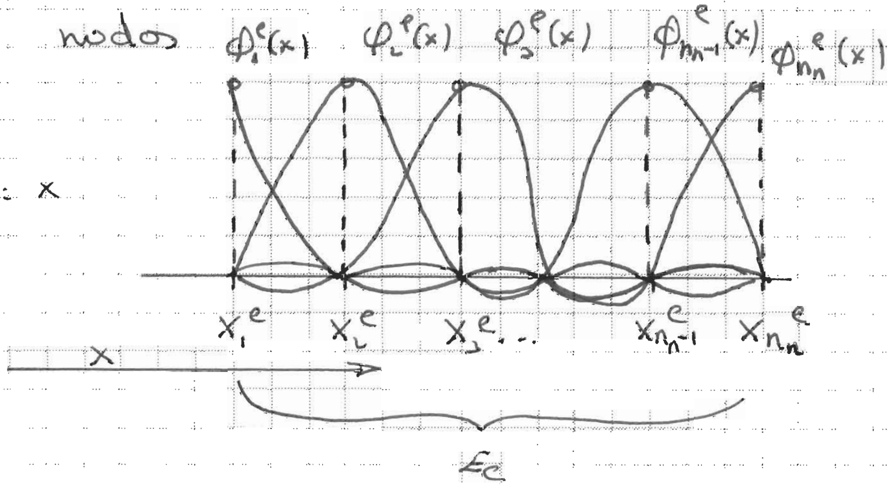
Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

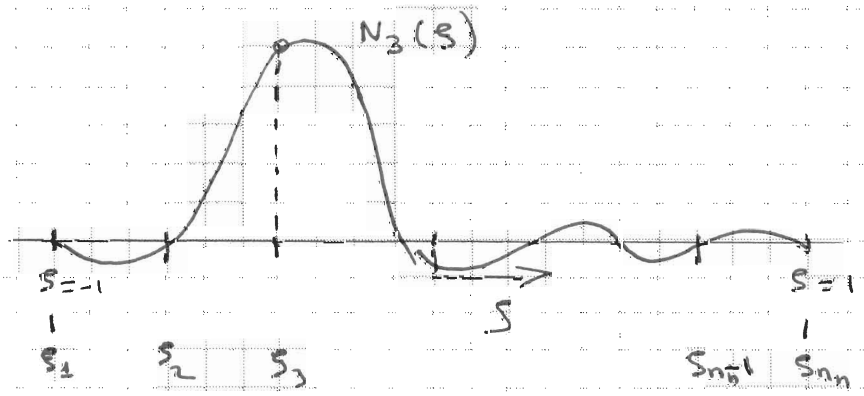
ELEMENTOS LAGRANGIANOS

Elemento de n_n nodos

Coordenada Material: x



Coordenada de Referencia: ξ



$$N_{i_n}(\xi) = \prod_{\substack{j_n=1,n_n \\ j_n\neq i_n}} \frac{(\xi-\xi_{j_n})}{(\xi_{i_n}-\xi_{j_n})} \quad \text{(Pol. Lagrange)}$$

$\Rightarrow$ $u^h(x)$ es un $P_{n_n-1}(\xi)$ a trozos (*)

$\underset{\sim}{K}$ es simétrica en banda, con semiancho de banda $= n_n - 1$

(*) ¡OJO! $u^h(x)$ es C^0

$u^h(x)$ sólo es un $P_{n_n-1}(x)$ si los nodos están equiespaciados.

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:

Materia:

Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

Luego, dentro del elemento E_e:

$$\begin{cases} u^h(x) = \sum_{i_n=1}^{n_n} \alpha_{i_n}^e \cdot N_{i_n}(s) \\ p^h(x) = \sum_{i_n=1}^{n_n} p_{i_n}^e \cdot N_{i_n}(s) \end{cases} \qquad s \in [-1, 1]$$

Elemento isoparamétrico:

$$\begin{cases} x(s) = \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_n}^e \, N_{i_n}(s) \qquad s \in [-1, 1] \\ \Delta(s) = \left| \dfrac{dx}{ds} \right| = \left| \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_n}^e \dfrac{dN_{i_n}}{ds}(s) \right| \end{cases}$$

Elemento no isoparamétrico:

E_j: $x(s) = x_1^e \left(\frac{1-s}{2}\right) + x_{n_n}^e \left(\frac{1+s}{2}\right)$

Se puede demostrar que si los nodos están equiespaciados, esto es equivalente a la interpolación isoparamétrica. (pues para este caso, $x(s) = p_1(s)$)

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

ESCOLA TÉCNICA SUPERIOR
DE ENXEÑEIROS DE CAMIÑOS,
CANAIS E PORTOS

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE INGENIEROS DE CAMINOS,
CANALES Y PUERTOS

Nome / *Nombre*:
Materia:
Curso: Grupo: Núm. Matrícula:

CALCULO DE CONTRIBUCIONES ELEMENTALES

Definimos:

$$\underset{\sim}{N} = \left[N_1(s) \quad N_2(s) \quad \dots \quad N_{n_n}(s) \right]$$

$$\underset{\sim}{L} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] \quad \leftarrow \{\varepsilon\} = \underset{\sim}{L} \{u\} \leftarrow E. \text{ COMPATIBILIDAD}$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{N} = \frac{d}{ds} \underset{\sim}{N}(s) \left(\frac{ds}{dx}\right)$$

$$\underset{\sim}{D} = \left[E \right] \quad \leftarrow \{\sigma\} = \underset{\sim}{D} \{\varepsilon\} \leftarrow E. \text{ CONSTITUTIVAS}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{f}^e = \int_{\Omega_e} \underset{\sim}{N}^T b\, A\, dx = \int_{s=-1}^{s=1} \underset{\sim}{N}^T(s)\, b(x)\Big|_{x=x(s)} A(x)\Big|_{x=x(s)} J(s)\, ds \\ \underset{\sim}{K}^e = \int_{\Omega_e} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, A\, dx = \int_{s=-1}^{s=1} \underset{\sim}{B}^T(s)\, D(x)\Big|_{x=x(s)} \underset{\sim}{B}(s)\, A(x)\Big|_{x=x(s)} J(s)\, ds \end{cases}$$

con $x(s) = \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_n}^e N_{i_n}(s) = \underset{\sim}{N}(s) \begin{Bmatrix} x_1^e \\ \vdots \\ x_{n_n}^e \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{N}(s)\, \bar{x}^e$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{J}(s) = \left[\frac{dx}{ds} \right] = \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_n}^e \frac{dN_{i_n}}{ds}(s) = \frac{d\underset{\sim}{N}(s)}{ds} \begin{Bmatrix} x_1^e \\ \vdots \\ x_{n_n}^e \end{Bmatrix} = \frac{d\underset{\sim}{N}}{ds}(s)\, \bar{x}^e \\ J(s) = \left| \det\left(\underset{\sim}{J}(s) \right) \right| \\ \left(\frac{ds}{dx}\right) = J^{-1}(s) = \dfrac{1}{\frac{d\underset{\sim}{N}}{ds}(s)\, \bar{x}^e} \end{cases}$$

Una vez resuelto el sistema: $x \in \Omega_e \Rightarrow$

$$u^h(x) = \underset{\sim}{N}(s) \begin{Bmatrix} \alpha_1^e \\ \vdots \\ \alpha_{n_n}^e \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{N}(s)\, \bar{\alpha}$$

$$\varepsilon^h(x) = \frac{du^h}{dx} = \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{N}(s)\, \bar{\alpha} = \underset{\sim}{B}(s)\, \bar{\alpha}$$

$$\sigma^h(x) = E\, \varepsilon^h(x) = \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{B}\, \bar{\alpha} = \underset{\sim}{S}(s)\, \bar{\alpha}$$