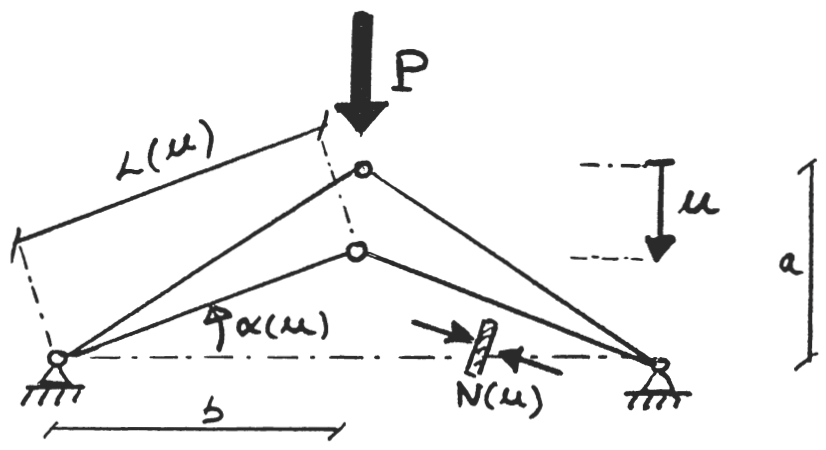


INTRODUCCIÓN
a los
MÉTODOS NUMÉRICOS
para
PROBLEMAS NO LINEALES

MODELO 1 G.D.L.



GEOMETRÍA

$$\left. \begin{aligned} L(u) &= \sqrt{(a-u)^2 + b^2} \\ \alpha(u) &= \arcsen \frac{a-u}{L(u)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{(NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA)}$$

Ec. COMPATIBILIDAD

$$\epsilon = \frac{L(0) - L(u)}{L(0)} \quad u \rightarrow \epsilon$$

Ec. CONSTITUTIVAS

$$\frac{N}{A} = \beta(\epsilon) (*) \quad \Rightarrow \text{(NO LINEALIDAD DEL MATERIAL)} \quad \epsilon \rightarrow N$$

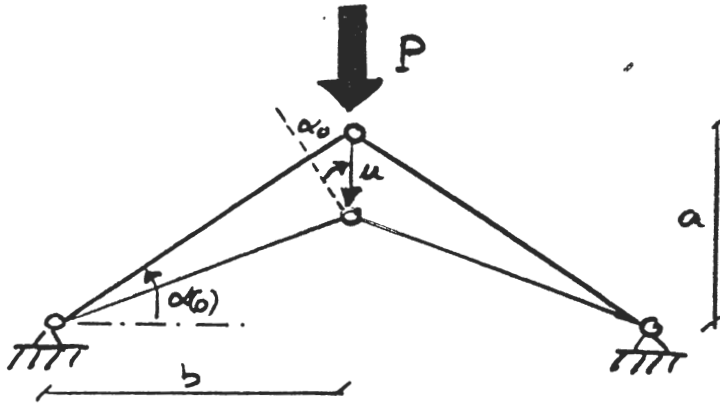
Ec. EQUILIBRIO

$$2N \operatorname{sen} \alpha - P = 0 \quad \boxed{f(u) = 0}$$

Variables $\left\{ \begin{array}{l} u = \text{desplazamiento generalizado} \\ \epsilon = \text{deformación generalizada} \\ N = \text{tensión generalizada} \end{array} \right.$

* MODELO ELÁSTICO DEL MATERIAL

CALCULO LINEAL



$$L(0) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin \alpha(0) = \frac{a}{L(0)}$$

GEOMETRÍA

$$L(u) \approx L(0) - u \sin \alpha(0)$$

$$\alpha(u) \approx \alpha(0)$$

(PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS)

Ec. COMPATIBILIDAD

$$\epsilon = \frac{L(0) - L(u)}{L(0)}$$

(PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS)

$$\epsilon \approx u \frac{\sin \alpha(0)}{L(0)}$$

Ec. CONSTITUTIVAS

$$\beta(\epsilon) \approx E \epsilon$$

$$\frac{N}{A} = \beta(\epsilon)$$

(ELASTICIDAD LINEAL)

$$N \approx EA \epsilon$$

Ec. EQUILIBRIO

$$\alpha(u) \approx \alpha(0)$$

$$2N \sin \alpha - P = 0$$

(1^{er} ORDEN)

$$2N \sin \alpha(0) - P \approx 0$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon &= u \frac{\sin \alpha(0)}{L(0)} = u \frac{a}{a^2+b^2} \\ N &= EA \epsilon = u \cdot EA \frac{a}{a^2+b^2} \\ 2N \sin \alpha_0 - P &= 0 \Rightarrow \left[2EA \frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} \right] u = P \end{aligned} \right.$$

$$K_0 u = P$$

$$K_0 = \left[2EA \frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} \right]$$



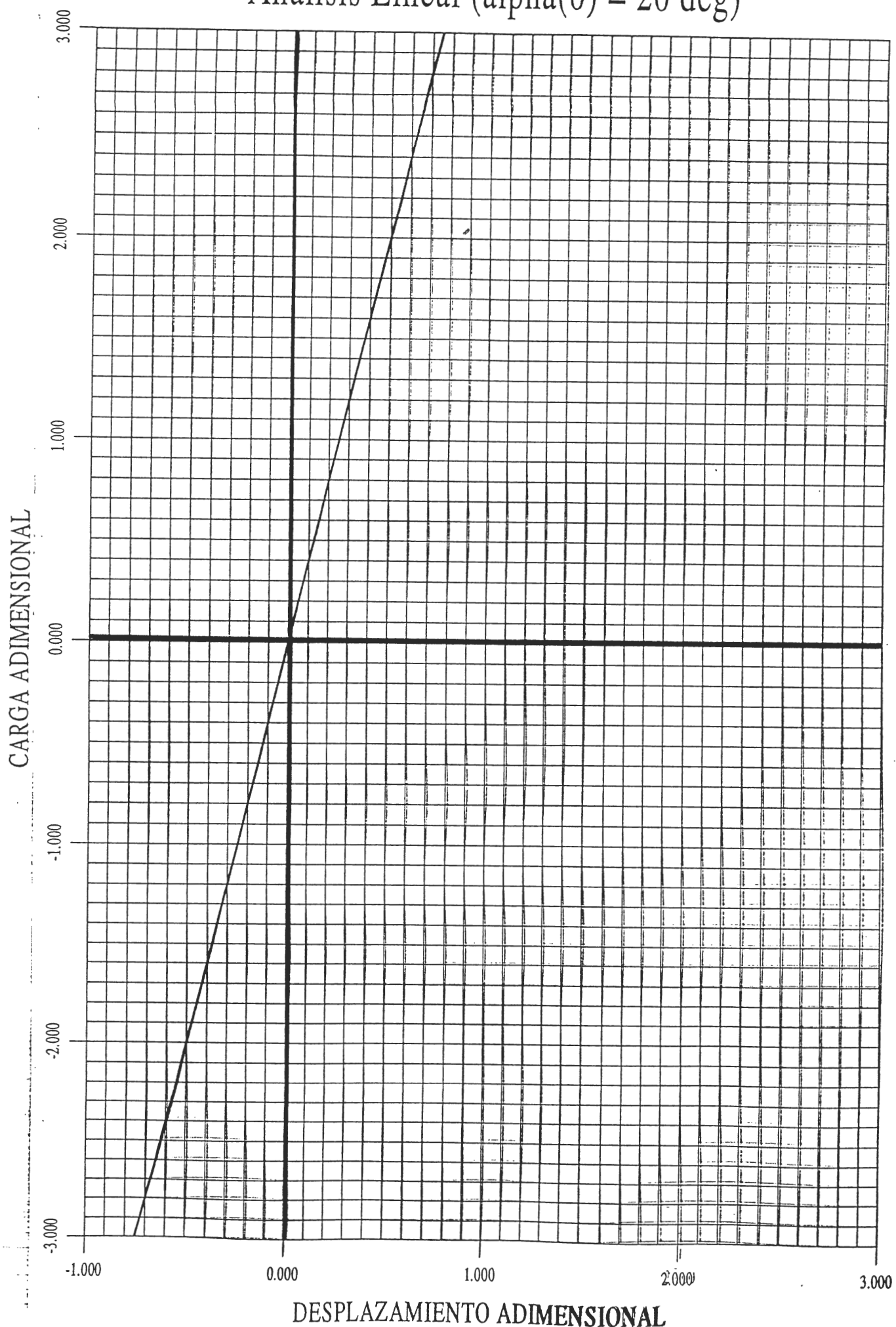
Representamos :

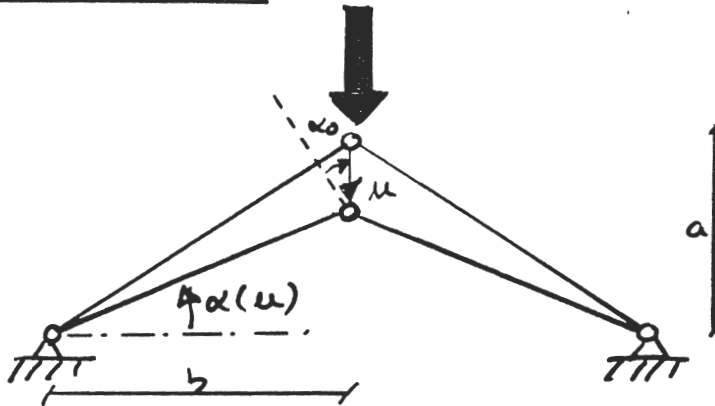
$$\hat{P} = \frac{P}{EA} \quad \text{frente a} \quad \hat{u} = \frac{u}{a}$$

$$\hat{P} = \hat{K}_0 \hat{u}$$

$$\hat{K}_0 = 2 \frac{a^3}{(a^2+b^2)^{3/2}}$$

Analisis Lineal ($\alpha(0) = 20 \text{ deg}$)



2° ORDEN

$$L(0) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sin(\alpha(0)) = \frac{a}{L(0)}$$

GEOMETRÍA

$$L(u) \approx L(0) - u \sin(\alpha(0)) \quad (\text{PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS})$$

$$\alpha(u) \approx \arcsin\left(\frac{a-u}{L(0)}\right)$$

EC. COMPATIBILIDAD

$$\epsilon = \frac{L(0) - L(u)}{L(0)}$$

(PEQUEÑOS DESPLAZAMIENTOS)

$$\epsilon \approx u \frac{\sin \alpha(0)}{L(0)}$$

EC. CONSTITUTIVAS

$$\rho(\epsilon) \approx E \epsilon$$

$$\frac{N}{A} = \rho(\epsilon)$$

(ELASTICIDAD LINEAL)

$$N \approx EA \epsilon$$

EC. EQUILIBRIO

$$\sin(\alpha(u)) \approx \frac{a-u}{L(0)}$$

$$2N \sin \alpha - P = 0$$

(2° ORDEN)

$$2N \frac{a-u}{L(0)} - P \approx 0$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = u \frac{\sin(\alpha(\theta))}{L(\theta)} = u \frac{a}{a^2 + b^2} \\ N = EA \varepsilon = u EA \frac{a}{a^2 + b^2} \\ 2N \frac{a-u}{L(\theta)} - P = 0 \Rightarrow \left[2EA \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{u}{a}\right) \right] u = P \end{array} \right.$$

$$K_2(u) \cdot u = P$$

$$K_2(u) = \left[K_0 \cdot \left(1 - \frac{u}{a}\right) \right]; \quad K_0 = 2EA \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

— u —

Representamos:

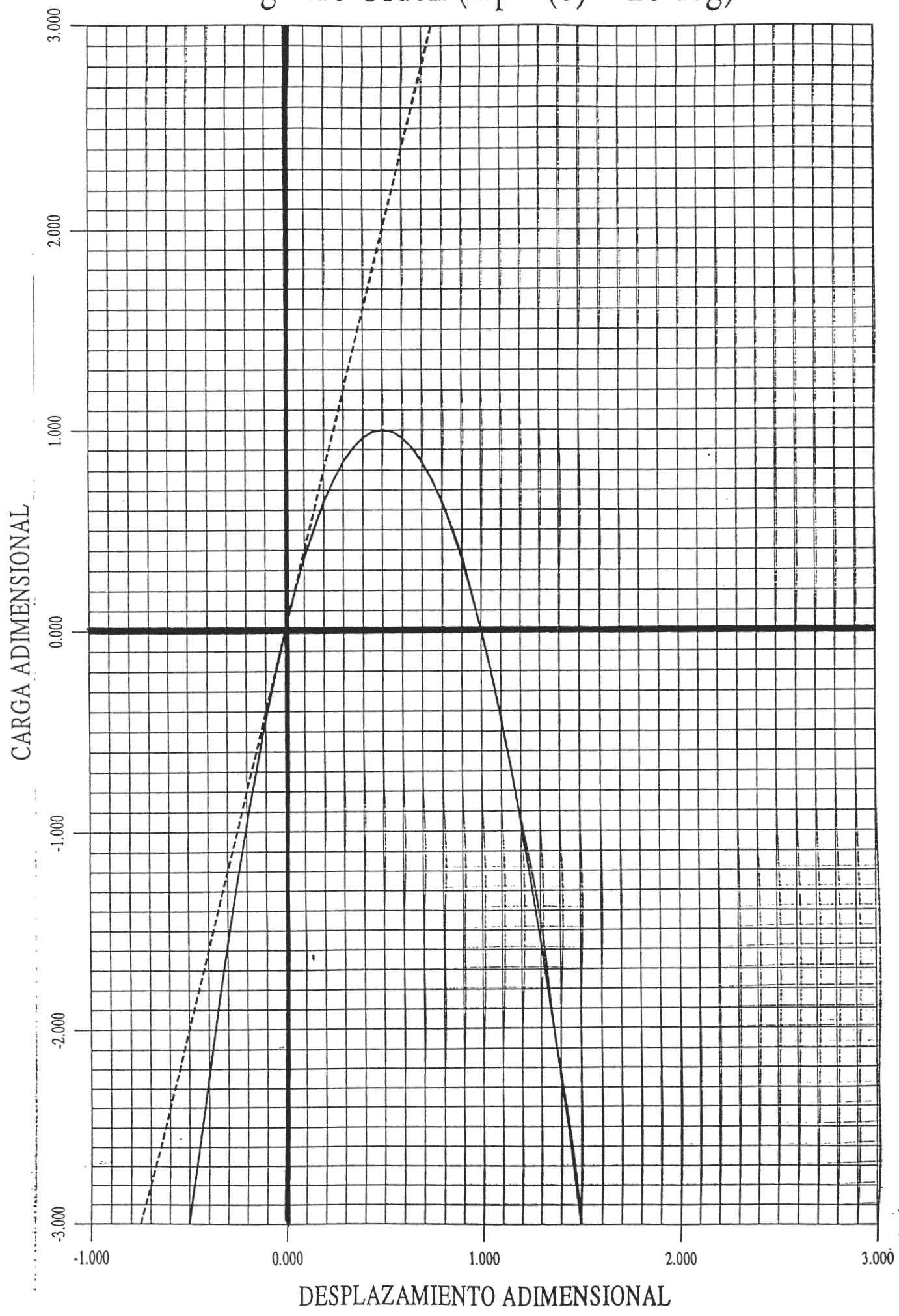
$$\hat{P} = \frac{P}{EA} \quad \text{frente a} \quad \hat{u} = \frac{u}{a}$$

$$\hat{P} = \hat{K}_2(\hat{u}) \cdot \hat{u}$$

$$\hat{K}_2(\hat{u}) = \hat{K}_0 \cdot (1 - \hat{u})$$

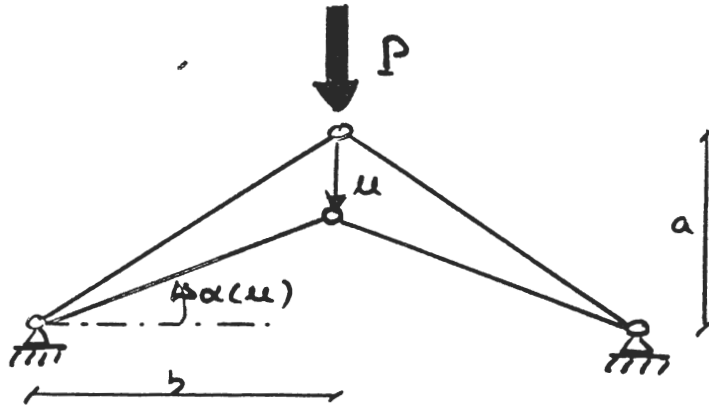
$$\hat{K}_0 = 2 \frac{a^3}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

Segundo Orden ($\alpha(0) = 20 \text{ deg}$)



DESPLAZAMIENTO ADIMENSIONAL

GRANDES DESPLAZAMIENTOS



GEOMETRÍA

$$L(u) = \sqrt{(a-u)^2 + b^2}$$

$$\alpha(u) = \arcsen \frac{a-u}{L(u)}$$

EC. COMPATIBILIDAD

$$\epsilon = \frac{L(0) - L(u)}{L(0)}$$

EC. CONSTITUTIVAS

$$\beta(\epsilon) \approx \epsilon E$$

$$\frac{N}{A} = \beta(\epsilon)$$

(ELASTICIDAD LINEAL)

$$N \approx EA \epsilon$$

EC. EQUILIBRIO

$$2N \sen \alpha - P = 0$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA

$$\varepsilon = \frac{L(0) - L(u)}{L(0)} = 1 - \sqrt{\frac{(a-u)^2 + b^2}{a^2 + b^2}}$$

$$N = EA \varepsilon = EA \left[1 - \sqrt{\frac{(a-u)^2 + b^2}{a^2 + b^2}} \right]$$

$$2N \frac{a-u}{L(u)} - P = 0 \Rightarrow K_{GD}(u) \cdot u = P$$

$$K_{GD}(u) = P$$

$$K_{GD}(u) = \left[k_2(u) \cdot \left(1 - \frac{u}{2a}\right) \cdot \frac{L(0)^2}{\left(\frac{L(0)+L(u)}{2}\right) L(u)} \right]$$

—//—

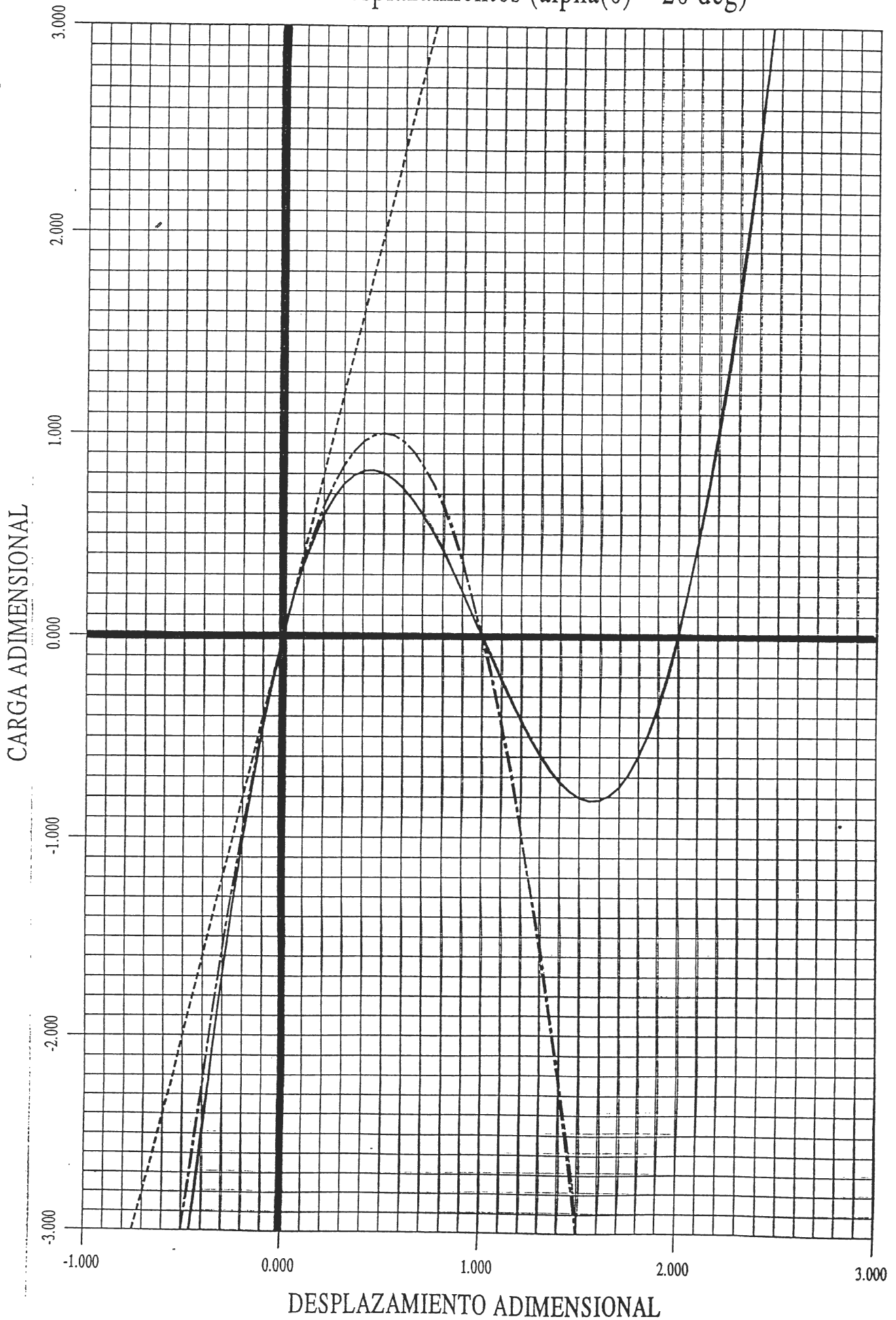
Representamos:

$$\hat{P} = \frac{P}{EA} \quad \text{frente a} \quad \hat{u} = \frac{u}{a}$$

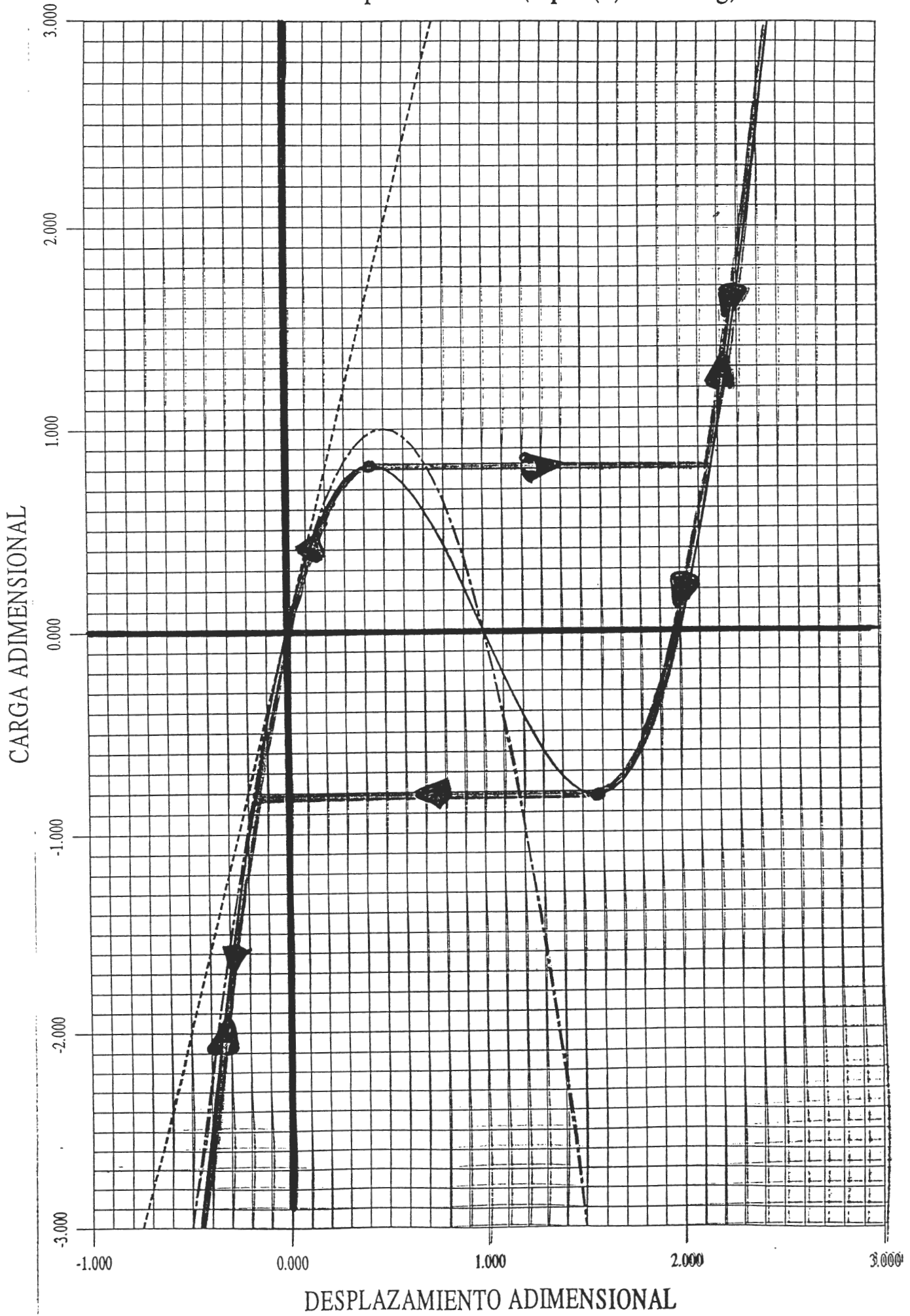
$$\hat{P} = \hat{K}_{GD}(\hat{u}) \hat{u}$$

$$\hat{K}_{GD}(\hat{u}) = \hat{k}_2(\hat{u}) \cdot \left(1 - \frac{\hat{u}}{2}\right) \frac{L(0)^2}{\left(\frac{L(0)+L(u)}{2}\right) L(u)}$$

Grandes Desplazamientos ($\alpha(0) = 20 \text{ deg}$)



Grandes Desplazamientos ($\alpha(0) = 20 \text{ deg}$)



CALCULO NO LINEAL

Dado u_k

$$L_k = L(u_k) = \sqrt{(a - u_k)^2 + b^2}$$

$$\alpha_k = \alpha(u_k) = a \operatorname{sen} \frac{a - u_k}{L(u_k)}$$

$$E_k = \frac{L(0) - L(u_k)}{L(0)} = 1 - \frac{L_k}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$N_k = A \beta(E_k)$$

$$\downarrow \quad \ddagger_k = 2 N_k \operatorname{sen} \alpha_k - P \quad \text{¿}\ddagger_k = 0\text{?}$$

ABSTRACCIÓN

$$\boxed{\ddagger(u) = 0}$$

OBSERVACIONES

- 1) En general NO DISPONDEREMOS DE SOLUCIÓN ANALÍTICA.
- 2) Pueden existir múltiples soluciones (la solución que busquemos puede depender de la historia). (*)
- 3) En general sólo podemos aspirar a encontrar una solución partiendo de una aproximación razonable
- 4) Los modelos completamente no-lineales pueden ser muy complejos (excesivamente)

Notas:

//

{ 2) y 3) \leadsto METODOS INCREMENTALES
 Varios S.O.L. $\leadsto \bar{f}(\bar{u}) = \bar{o}$
 (SISTEMA DE ECUACIONES NO-LINEALES)
 Es posible calcular $\left(\frac{df}{du}\right)$ [REGLA DE LA CADENA]

(*); INCLUSO EN PROBLEMAS ELÁSTICOS!

Una variable

PROBLEMA :

Dada	$f(x)$
HALLAR	α (solución)
que satisfice	$f(\alpha) = 0,$
conociendo	$x_0 \cong \alpha$ (Aprox. Inicial)

ALGORITMO:

Seleccionar	$\underline{\Psi(x)}$ (*)
e ITERAR	$x_1 = \Psi(x_0)$
	$x_2 = \Psi(x_1)$
	...
	$x_{k+1} = \Psi(x_k)$
hasta	\downarrow <u>CONVERGENCIA</u>

(*) de forma que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$

Varias variables

PROBLEMA :

Dada	$\bar{f}(\bar{x})$
HALLAR	$\bar{\alpha}$ (Solución)
que satisfice	$\bar{f}(\bar{\alpha}) = \bar{0}$
conociendo	$\bar{x}_0 \cong \bar{\alpha}$ (Aprox. Inicial)

ALGORITMO :

Seleccionar	$\bar{\Psi}(\bar{x})$ (*)
e ITERAR	$\bar{x}_1 = \bar{\Psi}(\bar{x}_0)$ $\bar{x}_2 = \bar{\Psi}(\bar{x}_1)$... $\bar{x}_{k+1} = \bar{\Psi}(\bar{x}_k)$
hasta	<u>CONVERGENCIA</u>

(*) de forma que $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \alpha$

ORDEN DE CONVERGENCIA.

1) ORDEN 1 \Leftrightarrow CONVERGENCIA LINEAL

$$\boxed{|X_{k+1} - \alpha| \leq \lambda_1 |X_k - \alpha|}$$

$$|X_{k+1} - \alpha| \leq \lambda_1 |X_k - \alpha|$$

$$|X_{k+2} - \alpha| \leq \lambda_1 |X_{k+1} - \alpha| \leq \lambda_1^2 |X_k - \alpha|$$

...

$$|X_{k+\nu} - \alpha| \leq \lambda_1 |X_{k+\nu-1} - \alpha| \leq \lambda_1^\nu |X_k - \alpha|$$

Luego:

$$\boxed{|X_{k+\nu} - \alpha| \leq \lambda_1^\nu |X_k - \alpha|}$$

\Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{El método converge si } |\lambda_1| < 1 \\ - \text{Velocidad de convergencia: } R = \log_{10}\left(\frac{1}{|\lambda_1|}\right) (*) \end{array} \right.$$

//

(*) ¿cuántas iteraciones ν hay que realizar para garantizar que $|X_{k+\nu} - \alpha| \leq 10^{-m} |X_k - \alpha|$?

$$\rightarrow \nu \geq \frac{m}{R}$$

2) ORDEN $p > 1 \Leftrightarrow$ CONVERGENCIA SUPERLINEAL

$$\boxed{|X_{k+1} - \alpha| \leq \lambda_p |X_k - \alpha|^p}$$

$$|X_{k+1} - \alpha| \leq \lambda_p |X_k - \alpha|^p$$

$$|X_{k+2} - \alpha| \leq \lambda_p |X_{k+1} - \alpha|^p \leq \lambda_p^{1+p} |X_k - \alpha|^{(p^2)}$$

...

$$|X_{k+\nu} - \alpha| \leq \lambda_p |X_{k+\nu-1} - \alpha|^p \leq \lambda_p^{(1+p+\dots+p^{\nu-1})} |X_k - \alpha|^{(p^\nu)}$$

$$\leq \lambda_p^{\frac{1-p^\nu}{1-p}} |X_k - \alpha|^{(p^\nu)}$$

luego:

$$\boxed{|X_{k+\nu} - \alpha| \leq \lambda_p^{\frac{1}{1-p}} \left[\lambda_p^{-\frac{1}{1-p}} |X_k - \alpha| \right]^{(p^\nu)}}$$

\Rightarrow

- El método converge si $\left[\lambda_p^{-\frac{1}{1-p}} |X_k - \alpha| \right] < 1$

\Leftrightarrow

$$|X_k - \alpha| < \rho_1 \sqrt{\frac{1}{\lambda_p}} \quad (*)$$

- La velocidad de convergencia no tiene sentido

—//—

(*) Para valores suficientemente próximos siempre converge

COMPARACIÓN ORDEN 1 - ORDEN P

Sean $\begin{cases} x_k = z_k = \text{aproximación inicial} \\ \{x_{k+1}, \dots, x_{k+\nu_1}\} = \text{obtenidos con orden 1} \\ \{z_{k+1}, \dots, z_{k+\nu_p}\} = \text{" " " " } p \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_{k+\nu_1} - \alpha| \leq \lambda_1^{\nu_1} |x_k - \alpha| \\ |z_{k+\nu_p} - \alpha| \leq \left[\lambda_p^{\frac{1}{p-1}} |x_k - \alpha| \right]^{(p\nu_p - 1)} |x_k - \alpha| \end{cases}$$

Suponemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \lambda_1 |x_k - \alpha| \simeq \left[\lambda_p^{\frac{1}{p-1}} |x_k - \alpha| \right]^{(p-1)} |x_k - \alpha| \\ \quad (\text{avanzan lo mismo en la } 1^{\text{a}} \text{ iteración}) \\ \Rightarrow \lambda_1 \simeq \lambda_p |x_k - \alpha|^{p-1} \\ 2) \lambda_1^{\nu_1} |x_k - \alpha| \simeq \left[\lambda_p^{\frac{1}{p-1}} |x_k - \alpha| \right]^{(p\nu_p - 1)} |x_k - \alpha| \\ \quad (\nu_1 \text{ iteraciones de orden 1} \simeq \nu_p \text{ iteraciones de orden } p) \\ \Rightarrow \lambda_1^{\nu_1} \simeq \left[\lambda_p |x_k - \alpha|^{p-1} \right]^{\frac{p\nu_p - 1}{p-1}} \end{array} \right.$$

Entonces:

$$\boxed{\nu_1 \simeq \frac{p\nu_p - 1}{p-1}}$$

Ejemplo: COMPANACIÓN ORDEN 1 - ORDEN 2

$$U_1 = \frac{2^{U_2} - 1}{2 - 1} = 2^{U_2} - 1$$

U_2	U_1
2	3
5	31
10	1023
20	1.048.575
100	$\sim 10^{30}$

CONCLUSIONES

- 1) LA VELOCIDAD DE CONVERGENCIA DE UN ALGORITMO SUPER LINEAL ES INFINITAMENTE SUPERIOR A LA DE UN ALGORITMO LINEAL (en un algoritmo lineal, cada tantas iteraciones se añade un número determinado de cifras exactas, mientras que un algoritmo super-lineal, cada tantas iteraciones se multiplica por una constante el número de cifras exactas)
- 2) HAY ALGORITMOS LINEALES LENTOS, PERO NO HAY ALGORITMOS SUPER-LINEALES LENTOS (o convergen en un número relativamente bajo de iteraciones, o algo funciona mal)
- 3) LA DIFERENCIA ENTRE ALGORITMOS LINEALES Y CUADRÁTICOS ES ABISMADORA. PARA ORDENES DE CONVERGENCIA SUPERIORES SE APRECIAN POCAS DIFERENCIAS (en general no se utilizan métodos de orden superior a 2)

¿Es convergente el algoritmo?

CONDICIONES DE LIPSCHITZ

$$\text{Si: } \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \exists \alpha \ / \ \alpha = \Psi(\alpha) \\ \text{b) } |\Psi(x) - \Psi(z)| \leq \lambda |x - z| \quad \forall x, z \in I \\ \quad \text{con } I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \quad 0 \leq \lambda < 1 \\ \text{c) } x_0 \in I \end{array} \right.$$

Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \ x_k \in I \quad \forall k > 0 \\ 2) \ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha \\ 3) \ \alpha \text{ es } \text{únicO} \text{ en } I \\ 4) \ |x_{k+1} - \alpha| \leq \lambda |x_k - \alpha|, \\ \quad \text{luego} \\ \quad |x_k - \alpha| \leq (\lambda)^k |x_0 - \alpha| \leq (\lambda)^k \rho \end{array} \right.$$

Notas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \rightarrow \alpha \text{ es un PUNTO FIJO de } \Psi(x) \\ \text{b) } \rightarrow \Psi(x) \text{ es CONTRACTIVA en } I \\ \text{c) } \rightarrow |x_0 - \alpha| \leq \rho \end{array} \right.$$

CONCLUSIONES

- 1) HAY QUE SELECCIONAR $\psi(x)$ QUE VERIFIQUE $\alpha = \psi(\alpha)$, SIENDO α LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.

$$\text{Ej: } \begin{cases} \psi(x) = x + \frac{f(x)}{d} \\ \psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

- 2) EN LA PRÁCTICA, NORMALMENTE ES IMPOSIBLE AVERIGUAR SI LA FUNCIÓN ES CONTRACTIVA EN UN INTERVALO CENTRADO EN LA SOLUCIÓN
- 3) EN LA PRÁCTICA, NORMALMENTE ES IMPOSIBLE AVERIGUAR SI LA APROXIMACIÓN INICIAL x_0 PERTENECE AL INTERVALO ANTERIOR.

ORDEN ASINTÓTICO DE CONVERGENCIA

Sea $x_k \approx \alpha$ $\alpha = \psi(\alpha)$

1) $\psi'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$

$$x_{k+1} = \psi(x_k) = \psi(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)}{1!} \psi'(\alpha) + \mathcal{O}(|x_k - \alpha|^2)$$

$$\boxed{|x_{k+1} - \alpha| \leq \left| \psi'(\alpha) + \mathcal{O}(|x_k - \alpha|) \right| |x_k - \alpha|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ASINTÓTICAMENTE LINEAL} \\ \text{CONVERGENTE si } |\psi'(\alpha)| < 1 \quad (*) \\ \text{DIVERGENTE si } |\psi'(\alpha)| > 1 \end{cases}$$

2) $\psi'(\alpha) = \psi''(\alpha) = \dots = \psi^{(p-1)}(\alpha) = 0$; $\psi^{(p)}(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$

$$x_{k+1} = \psi(x_k) = \psi(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^p}{p!} \psi^{(p)}(\alpha) + \mathcal{O}(|x_k - \alpha|^{p+1})$$

$$\boxed{|x_{k+1} - \alpha| \leq \left| \frac{\psi^{(p)}(\alpha)}{p!} + \mathcal{O}(|x_k - \alpha|) \right| |x_k - \alpha|^p}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ASINTÓTICAMENTE DE ORDEN "P"} \\ \text{CONVERGENTE} \quad (**) \end{cases}$$

— // —

NOTAS:

(*) para valores de x_0 suficientemente próximos a la solución

(**) idem.

¿Es convergente el algoritmo cuando lo ejecuta un ordenador digital?

$$\begin{cases} \text{Teóricamente : } & X_{k+1} = \Psi(X_k) \\ \text{En realidad : } & \hat{X}_{k+1} = \Psi(\hat{X}_k) + \delta_k \end{cases}$$

δ_k = error absoluto de redondeo y truncamiento que comete el ordenador al calcular y almacenar $\Psi(\hat{X}_k)$

Sea $|\delta_k| \leq \delta$,

$$\text{Si : } \begin{cases} \text{a) } \exists \alpha / \alpha = \Psi(\alpha) \\ \text{b) } |\Psi(x) - \Psi(z)| \leq \lambda |x - z| \quad \forall x, z \in I \\ \quad \text{con } I = [\alpha - \rho, \alpha + \rho] \quad 0 \leq \lambda < 1 \\ \text{c) } \hat{X}_0 \in I_0 \subset I \\ \quad \text{con } I_0 = [\alpha - \rho_0, \alpha + \rho_0], \quad 0 < \rho_0 \leq \rho - \frac{\delta}{1-\lambda} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{cases} \text{1) } \hat{X}_k \in I \quad \forall k \\ \text{2) } |X_k - \alpha| \leq \frac{\delta}{1-\lambda} + (\lambda)^k \left[\rho_0 - \frac{\delta}{1-\lambda} \right] \end{cases}$$

$$\text{Luego } k \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{X_k} \in \left[\alpha - \frac{\delta}{1-\lambda}, \alpha + \frac{\delta}{1-\lambda} \right]$$

Notas:

$$\begin{cases} \text{a) } \rightarrow \alpha \text{ es un PUNTO FIJO de } \Psi(x) \\ \text{b) } \rightarrow \Psi(x) \text{ es CONTRACTIVA en } \mathbb{I} \\ \text{c) } \rightarrow |X_0 - \alpha| \leq \rho_0 < \rho \text{ (MÁS RESTRICTIVA)} \end{cases}$$

CONCLUSIONES

$$|X_k - \alpha| \leq \frac{\delta}{1-\lambda} + (\lambda)^k \left[\rho_0 - \frac{\delta}{1-\lambda} \right]$$

- 1) PODEMOS ACERCARNOS A α DENTRO DE LOS LÍMITES DE PRECISIÓN DE LA MÁQUINA

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow |X_k - \alpha| \leq \frac{\delta}{1-\lambda}$$

- 2) A PARTIR DE UN DETERMINADO MOMENTO NO MERECE LA PENA ITERAR.

$$\frac{\delta}{1-\lambda} \approx (\lambda)^k \left[\rho_0 - \frac{\delta}{1-\lambda} \right] \Rightarrow$$

$$k \approx \log \left[\rho_0 \frac{(1-\lambda)}{\delta} - 1 \right] / \log(1/\lambda)$$

- 3) LOS ALGORITMOS DE BAJA VELOCIDAD DE CONVERGENCIA, ADÉMÁS DE LENTOS SON POCO PRECISOS

$$\lambda \approx 1 \Rightarrow \left| \frac{\delta}{1-\lambda} \right| \text{ es grande}$$

¿CÓMO SE DETIENE EL ALGORITMO?

IF $\left\{ |X_{K+1} - X_K| \leq \max \{ |X_{K+1}| \cdot r_x, e_x \} \right.$

$\left. |f(X_{K+1})| \leq e_f \right\}$ THEN

$x \approx X_{K+1}$

STOP

ELSE IF $\left\{ (K+1) \geq K_{MAX} \right\}$ THEN

PRINT "número excesivo de iteraciones"

STOP

ELSE

$K = K+1$

CONTINUE

END IF

MÉTODOS QUASI-NEWTON

$$f(\bar{x}) = \bar{0} \quad \leadsto \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \Delta \bar{x}_k \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{R}_k \Delta \bar{x}_k = -\bar{f}(\bar{x}_k) \\ \Delta \bar{x}_k = -\underline{S}_k \bar{f}(\bar{x}_k) \end{array} \right. \\ \underline{S}_{k+1} = \underline{S}_k + \underline{C}_k \quad ; \quad \underline{R}_{k+1} = \underline{S}_{k+1}^{-1} \end{array} \right.$$

RANGO 1

$$\underline{C}_k = \delta_k \bar{z}_k \bar{z}_k^T \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_k = \frac{1}{\Delta \bar{f}_k^T (\Delta \bar{x}_k - \underline{S}_k \Delta \bar{f}_k)} \\ \bar{z}_k = (\Delta \bar{x}_k - \underline{S}_k \Delta \bar{f}_k) \end{array} \right.$$

$$\text{siendo: } \left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{x}_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k \\ \Delta \bar{f}_k = \bar{f}(\bar{x}_{k+1}) - \bar{f}(\bar{x}_k) \end{array} \right.$$

RANGO 2

$$\text{DFP: } \underline{C}_k = \delta_k \Delta \bar{x}_k \Delta \bar{x}_k^T + \rho_k [\underline{S}_k \Delta \bar{f}_k] [\underline{S}_k \Delta \bar{f}_k]^T$$

$$\text{con } \left\{ \begin{array}{l} \delta_k = \frac{1}{\Delta \bar{f}_k^T (\Delta \bar{x}_k)} \\ \rho_k = \frac{-1}{\Delta \bar{f}_k^T (\underline{S}_k \Delta \bar{f}_k)} \end{array} \right.$$

$$\text{BFGS: } \underline{C}_k = \underline{S}_k + \left[\underline{I} - \frac{\Delta \bar{x}_k \Delta \bar{f}_k^T}{(\Delta \bar{f}_k^T \Delta \bar{x}_k)} \right] \underline{S}_k \left[\underline{I} - \frac{\Delta \bar{f}_k \Delta \bar{x}_k^T}{(\Delta \bar{f}_k^T \Delta \bar{x}_k)} \right] + \frac{\Delta \bar{x}_k \Delta \bar{x}_k^T}{(\Delta \bar{f}_k^T \Delta \bar{x}_k)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \updownarrow \\ \underline{R}_{k+1} = \underline{R}_k + \frac{1}{\Delta \bar{x}_k^T (\Delta \bar{f}_k)} \Delta \bar{f}_k \Delta \bar{f}_k^T + \frac{-1}{\Delta \bar{x}_k^T (\underline{R}_k \Delta \bar{x}_k)} [\underline{R}_k \Delta \bar{x}_k] [\underline{R}_k \Delta \bar{x}_k]^T \end{array} \right.$$

$$\text{Familia de Broyden: } \underline{C}_k = \mu \underline{C}_k^{\text{DFP}} + (1-\mu) \underline{C}_k^{\text{BFGS}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \rightarrow \text{DFP} \\ \mu = 0 \rightarrow \text{BFGS} \end{array} \right.$$