– **Typeset by GMNI &** FoilTeX –

http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

MÉTODOS DIRECTOS PARA GRANDES SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: FACTORIZACIONES DE CROUT Y CHOLESKY

F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fnavarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

ÍNDICE

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

FACTORIZACIÓN DE CROUT $\quad [\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{U}]$

Sea el problema

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\,\bar{x} = \bar{b}} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}.$$

La **FACTORIZACIÓN DE CROUT** consiste en:

$$\boxed{\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{U}} \implies \underset{\sim}{L}\,\overbrace{\underset{\sim}{D}\,\underbrace{\underset{\sim}{U}\,\bar{x}}_{\bar{y}}}^{\bar{z}} = \bar{b} \implies \begin{cases} \underset{\sim}{L}\,\bar{z} = \bar{b}, \\ \qquad\searrow \\ \underset{\sim}{D}\,\bar{y} = \bar{z}, \\ \qquad\searrow \\ \underset{\sim}{U}\,\bar{x} = \bar{y}. \end{cases}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

Supongamos que ya hemos factorizado

$$\underset{\sim}{A}_k = \underset{\sim}{L}_k \, \underset{\sim}{D}_k \, \underset{\sim}{U}_k, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

siendo

$$\underset{\sim}{L}_k = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{k1} & \cdots & l_{kk} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{D}_k = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{kk} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{U}_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{kk} \end{bmatrix}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Pretendemos factorizar (a partir de lo anterior)

$$\underset{\sim}{A}_{k+1} = \underset{\sim}{L}_{k+1}\,\underset{\sim}{D}_{k+1}\,\underset{\sim}{U}_{k+1}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A}_{k+1} = \left[\begin{array}{cc} \underset{\sim}{A}_k & \bar{c}_{k+1} \\ \bar{f}^T_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{array}\right],$$

de forma que

$$\underset{\sim}{L}_{k+1} = \left[\begin{array}{cc} \underset{\sim}{L}_k & \bar{0} \\ \bar{l}^T_{k+1} & l_{k+1,k+1} \end{array}\right], \quad \underset{\sim}{D}_{k+1} = \left[\begin{array}{cc} \underset{\sim}{D}_k & \bar{0} \\ \bar{0}^T & d_{k+1,k+1} \end{array}\right], \quad \underset{\sim}{U}_{k+1} = \left[\begin{array}{cc} \underset{\sim}{U}_k & \bar{u}_{k+1} \\ \bar{0}^T & u_{k+1,k+1} \end{array}\right].$$

donde

$$\bar{c}_{k+1} = \left\{\begin{array}{c} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{array}\right\}, \qquad \bar{u}_{k+1} = \left\{\begin{array}{c} u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{k,k+1} \end{array}\right\},$$

$$\bar{f}^T_{k+1} = [\, a_{k+1,1} \quad \cdots \quad a_{k+1,k} \,], \qquad \bar{l}^T_{k+1} = [\, l_{k+1,1} \quad \cdots \quad l_{k+1,k} \,].$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Multiplicamos por cajas . . .

$$\utilde{D}_{k+1}\,\utilde{U}_{k+1} = \begin{bmatrix} \utilde{D}_k\,\utilde{U}_k + \overbrace{\bar{0}\,\bar{0}^T}^{\utilde{0}} & \utilde{D}_k\,\bar{u}_{k+1} + \overbrace{\bar{0}\,u_{k+1,k+1}}^{\bar{0}} \\ \underbrace{\bar{0}^T\utilde{U}_k}_{\bar{0}^T} + \underbrace{d_{k+1,k+1}\,\bar{0}^T}_{\bar{0}^T} & \underbrace{\bar{0}^T\bar{u}_{k+1}}_{0} + d_{k+1,k+1}\,u_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

$$\utilde{L}_{k+1}\,\left(\utilde{D}_{k+1}\,\utilde{U}_{k+1}\right) = \begin{bmatrix} \utilde{L}_k\,\utilde{D}_k\,\utilde{U}_k + \overbrace{\bar{0}\,\bar{0}^T}^{\utilde{0}} & \utilde{L}_k\,\utilde{D}_k\,\bar{u}_{k+1} + \overbrace{\bar{0}\,d_{k+1,k+1}\,u_{k+1,k+1}}^{\bar{0}} \\ \bar{l}^T_{k+1}\utilde{D}_k\,\utilde{U}_k + \underbrace{l_{k+1,k+1}\,\bar{0}^T}_{\bar{0}^T} & \bar{l}^T_{k+1}\utilde{D}_k\,\bar{u}_{k+1} \;+\; l_{k+1,k+1}\,d_{k+1,k+1}\,u_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Fundamentos Teóricos (IId)

Igualamos . . .

$$\left[\begin{array}{cc} \underset{\sim}{A}_k & \bar{c}_{k+1} \\ \bar{f}^T_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k & \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1} \\ \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k & \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1} + l_{k+1,k+1}\, d_{k+1,k+1}\, u_{k+1,k+1} \end{array}\right],$$

lo que por cajas equivale a

$$\left\{\begin{array}{ll} \underset{\sim}{A}_k = \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k, & [\Leftarrow \quad \textbf{HIPÓTESIS}] \\ \bar{c}_{k+1} = \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1}, & \\ \bar{f}^T_{k+1} = \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k, & \\ a_{k+1,k+1} = \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1} + l_{k+1,k+1}\, d_{k+1,k+1}\, u_{k+1,k+1}. & \end{array}\right.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Por tanto ...

1. **El vector $\bar{u}_{k+1}$ es la solucíón del sistema**:

$$[\underset{\sim}{L}_k\ \underset{\sim}{D}_k]\ \boxed{\bar{u}_{k+1}} = \boxed{\bar{c}_{k+1}}.$$

2. **El vector $\bar{l}_{k+1}$ es la solucíón del sistema**:

$$[\underset{\sim}{U}_k^T \underset{\sim}{D}_k]\ \boxed{\bar{l}_{k+1}} = \boxed{\bar{f}_{k+1}}.$$

3. **Los coeficientes $l_{k+1,k+1}$, $d_{k+1,k+1}$ y $u_{k+1,k+1}$ verifican**:

$$\boxed{l_{k+1,k+1}}\ \boxed{d_{k+1,k+1}}\ \boxed{u_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^T \underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1}. \qquad (\star)$$

$(\star)$ Donde $\bar{l}_{k+1}$ y $\bar{u}_{k+1}$ se habrán calculado previamente.
Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$\boxed{l_{k+1,k+1}} = 1, \quad \boxed{u_{k+1,k+1}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^T \underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

4. **Para** $k = 1$:

$$\underset{\sim}{A}_1 = \underset{\sim}{L}_1 \, \underset{\sim}{D}_1 \, \underset{\sim}{U}_1 \Longrightarrow \boxed{l_{11}}\ \boxed{d_{11}}\ \boxed{u_{11}} = \boxed{a_{11}}. \qquad (\star)$$

5. **Para** $k = n$:

$$\underset{\sim}{A}_n = \underset{\sim}{A} \Longrightarrow \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L} \, \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{U} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}_n, \\ \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}_n, \\ \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}_n. \end{cases}$$

$(\star)$ Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$\boxed{l_{11}} = 1, \quad \boxed{u_{11}} = 1 \Longrightarrow \boxed{d_{11}} = \boxed{a_{11}}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

Asignar $\boxed{l_{11}} = 1, \quad \boxed{u_{11}} = 1,$

$\boxed{d_{11}} = \boxed{a_{11}}.$

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{Resolver} & \left[\underset{\sim}{L}_k \quad \underset{\sim}{D}_k\right] \boxed{\bar{u}_{k+1}} = \boxed{\bar{c}_{k+1}}, \\[2ex]
 & \left[\underset{\sim}{U}_k{}^T \underset{\sim}{D}_k\right] \boxed{\bar{l}_{k+1}} = \boxed{\bar{f}_{k+1}}. \\[2ex]
\text{Asignar} & \boxed{l_{k+1,k+1}} = 1, \quad \boxed{u_{k+1,k+1}} = 1, \\[1ex]
 & \boxed{d_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^T \underset{\sim}{D}_k \, \bar{u}_{k+1}.
\end{array}\right.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Notas:

1. Los sistemas $\left[\underset{\sim}{L}_k\ \underset{\sim}{D}_k\right]\ \bar{u}_{k+1} = \bar{c}_{k+1}$ se resuelven en dos fases:

$$\underset{\sim}{L}_k\ \overbrace{\underset{\sim}{D}_k\ \bar{u}_{k+1}}^{\bar{v}_{k+1}} = \bar{c}_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L}_k\ \bar{v}_{k+1} = \bar{c}_{k+1}, \\ \qquad\qquad \searrow \\ \underset{\sim}{D}_k\ \bar{u}_{k+1} = \bar{v}_{k+1}. \end{cases}$$

2. Los sistemas $\left[\underset{\sim}{U}_k^T\ \underset{\sim}{D}_k\right]\ \bar{l}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}$ se resuelven en dos fases:

$$\underset{\sim}{U}_k^T\ \overbrace{\underset{\sim}{D}_k\ \bar{l}_{k+1}}^{\bar{m}_{k+1}} = \bar{f}_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underset{\sim}{U}_k^T\ \bar{m}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}, \\ \qquad\qquad \searrow \\ \underset{\sim}{D}_k\ \bar{l}_{k+1} = \bar{m}_{k+1}. \end{cases}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS (continuación)

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS:

Resolver

$$\underset{\sim}{L}\ \boxed{\bar{z}} = \boxed{\bar{b}},$$

$$\underset{\sim}{D}\ \boxed{\bar{y}} = \boxed{\bar{z}},$$

$$\underset{\sim}{U}\ \boxed{\bar{x}} = \boxed{\bar{y}}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

CONDICIONES DE EXISTENCIA

Por construcción (unos en la diagonal principal), se cumple

$$\det(\underset{\sim}{L}_k) = \det(\underset{\sim}{U}_k) = 1 \qquad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Por tanto, basta con que se cumplan las condiciones

$$\begin{cases} \det(\underset{\sim}{D}_k) \neq 0,\ k = 1, \ldots, n-1 & \text{para que pueda realizarse la factorización,} \\ \det(\underset{\sim}{D}_k) \neq 0,\ k = n & \text{para que pueda realizarse la solución de sistemas.} \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\underset{\sim}{A}_k = \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k \quad \Longrightarrow \quad \det(\underset{\sim}{A}_k) = \det(\underset{\sim}{L}_k)\ \det(\underset{\sim}{D}_k)\ \det(\underset{\sim}{U}_k) = \det(\underset{\sim}{D}_k)\ \forall k.$$

Luego, las condiciones de existencia pueden expresarse en la forma

$$\boxed{\begin{cases} \det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0,\ k = 1, \ldots, n-1 & \text{para que pueda realizarse la factorización,} \\ \det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0,\ k = n & \text{para que pueda realizarse la solución de sistemas.} \end{cases}}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

En general, podemos afirmar que:

♡ Si la matriz es **REGULAR** $\left[\det(\underset{\sim}{A}) \neq 0\right]\ldots$

- ♠ puede pasar que la factorización exista; $(\star)$
- ♠ puede pasar que la factorización **NO** exista; $(\star\star)$
- ♠ es prácticamente imposible comprobar *a priori* la condición de existencia anterior;
- ♣ es sencillo (y RECOMENDABLE en todo caso) comprobar sobre la marcha que

$$d_{11} \neq 0, \qquad d_{k+1,k+1} \neq 0 \text{ para } k = 1, \ldots, n.$$

♠ Aunque la matriz sea **SINGULAR** $\left[\det(\underset{\sim}{A}) = 0\right]\ldots$

- ♠ puede pasar que la factorización exista; $(\star)$
- ♠ pero no se podrá utilizar para resolver el sistema. $(\star\star\star)$

$(\star)$ Esto sucederá cuando $\det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0,\ k = 1, \ldots, n-1$.

$(\star\star)$ Esto sucederá cuando no se cumpla la condición anterior. Por ejemplo, cuando $a_{11} = 0$.
Al igual que en el Método de Gauss, estos casos requieren **PIVOTAMIENTO** (intercambio de filas y/o columnas).
El problema es que el pivotamiento casa mal con los almacenamientos en banda y en perfil.

$(\star\star\star)$ Porque el sistema no tiene solución y el algoritmo fallará al resolver $\underset{\sim}{D}\ \boxed{\bar{y}} = \boxed{\bar{z}}$.

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Fundamentos Teóricos (IVc)

Un caso importante es el de las **MATRICES DEFINIDAS**:

$$\boxed{\underset{\sim}{A} \quad \text{DEFINIDA} \quad \Longrightarrow \quad \det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n.}$$

Luego, si $\underset{\sim}{A}$ es **DEFINIDA** (positiva o negativa)

- ◇ puede realizarse la factorización y
- ◇ puede realizarse la solución de sistemas.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

$$l_{11} = 1, \quad u_{11} = 1$$

$$d_{11} = a_{11}$$

```
DO k=1,n-1
```

$$u_{i,k+1} = a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} \quad ; \ i = 1, \ldots, k$$

$$u_{i,k+1} = u_{i,k+1} \,/\, d_{ii} \quad ; \ i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} \quad ; \ i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = l_{k+1,i} \,/\, d_{ii} \quad ; \ i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,k+1} = 1, \quad u_{k+1,k+1} = 1$$

$$d_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1,j}\, d_{jj}\, u_{j,k+1}$$

```
ENDDO
```

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: $(\ast)$

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j \qquad ;\ i = n, \ldots, 1, -1$$

$(\ast)$ Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la matriz $\underset{\sim}{U}$ por filas.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS.
APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] ($\star$)

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_j = x_j - \qquad u_{ji}\, x_i \qquad ;\ j = 1, \ldots, i-1 \qquad ;\ i = n, \ldots, 2, -1$$

($\star$) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil.
Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la matriz $\underset{\sim}{U}$ por columnas.

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Programación (–)

Es fácil comprobar que

- podemos almacenar $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{D}$ y $\underset{\sim}{U}$ sobre $\underset{\sim}{A}$;
- podemos almacenar $\bar{z}$, $\bar{y}$ y $\bar{x}$ sobre $\bar{b}$;

Así. . .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{bmatrix} d_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & d_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & d_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

DO k=1,n-1

$$a_{i,k+1} \leftarrow a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, a_{j,k+1} \quad ; \; i = 2, \ldots, k$$

$$a_{i,k+1} \leftarrow a_{i,k+1} \,/\, a_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji}\, a_{k+1,j} \quad ; \; i = 2, \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} \,/\, a_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$a_{k+1,k+1} \leftarrow a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}\, a_{jj}\, a_{j,k+1}$$

ENDDO

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: $(\star)$

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = n-1, \ldots, 1, -1$$

$(\star)$ Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la parte superior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por filas.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] $(\ast)$

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$b_j \leftarrow b_j - a_{ji}\, b_i \qquad ;\ j = 1, \ldots, i-1 \qquad ;\ i = n, \ldots, 2, -1$$

$(\ast)$ Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil.
Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la parte superior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por columnas.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS.
APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Sea la matriz $\underset{\sim}{A}$ tal que

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & a_{i-u(i),i} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{i-1,i} \\ 0 & 0 & a_{i,i-\ell(i)} & \cdots & \cdots & a_{i,i-1} & a_{ii} \\ & & & & & & \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \longrightarrow \text{fila } i \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{r} \downarrow \\ \text{columna } i \end{array} & \end{array}$$

donde

$$\begin{cases} \ell(i) \equiv \text{semiancho de banda inferior de la fila } i, \\ u(i) \equiv \text{semiancho de banda superior de la columna } i. \end{cases}$$

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Adaptación a Banda y Perfil (Ib)

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Examinamos en detalle el cálculo $\begin{cases} \text{de la fila } k+1 \text{ de } \underset{\sim}{L}, \text{ y} \\ \text{de la columna } k+1 \text{ de } \underset{\sim}{U}. \end{cases}$

$$u_{i,k+1} = a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$u_{i,k+1} = u_{i,k+1} \,/\, d_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k \quad \longrightarrow \text{IRRELEVANTE}$$

$$l_{k+1,i} = a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = l_{k+1,i} \,/\, d_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k \quad \longrightarrow \text{IRRELEVANTE}$$

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Adaptación a Banda y Perfil (Ic)

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

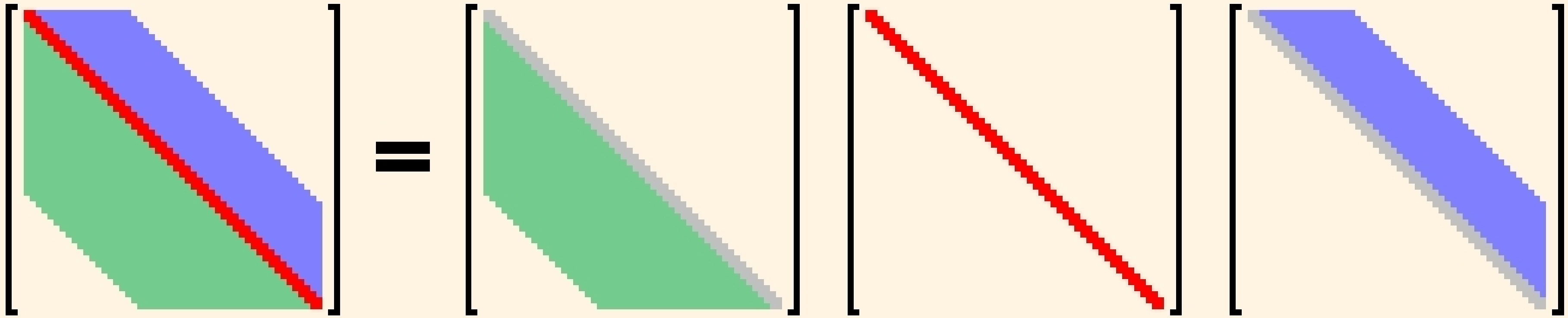
Observamos que (a falta de dividir por los elementos d_{ii}) ...

$$\left\{\begin{array}{llll}
i = 1 & \longrightarrow \boxed{a_{i,k+1} = 0} & \Rightarrow \boxed{u_{i,k+1} =} \; a_{i,k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} & = \boxed{0}, \\
i = 2 & \longrightarrow \boxed{a_{i,k+1} = 0} & \Rightarrow \boxed{u_{i,k+1} =} \; a_{i,k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} & = \boxed{0}, \\
\vdots & & & \\
i = (k+1) - u(k+1) - 1 & \longrightarrow \boxed{a_{i,k+1} = 0} & \Rightarrow \boxed{u_{i,k+1} =} \; a_{i,k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} & = \boxed{0}, \\
i = (k+1) - u(k+1) & \longrightarrow \boxed{a_{i,k+1} \neq 0} & \Rightarrow \boxed{u_{i,k+1} =} \; a_{i,k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} & = \boxed{a_{i,k+1} \neq 0}.
\end{array}\right.$$

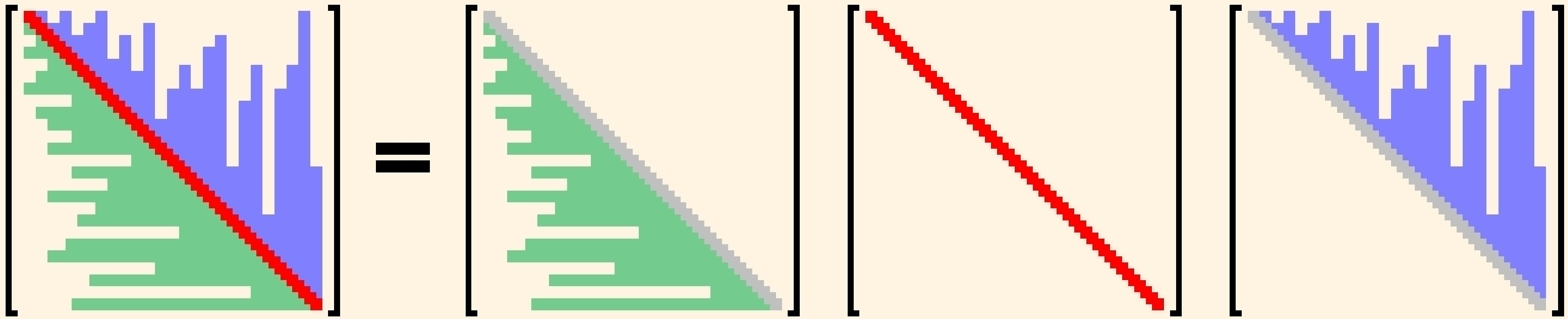
$$\left\{\begin{array}{llll}
i = 1 & \longrightarrow \boxed{a_{k+1,i} = 0} & \Rightarrow \boxed{l_{k+1,i} =} \; a_{k+1,i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} & = \boxed{0}, \\
i = 2 & \longrightarrow \boxed{a_{k+1,i} = 0} & \Rightarrow \boxed{l_{k+1,i} =} \; a_{k+1,i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} & = \boxed{0}, \\
\vdots & & & \\
i = (k+1) - \ell(k+1) - 1 & \longrightarrow \boxed{a_{k+1,i} = 0} & \Rightarrow \boxed{l_{k+1,i} =} \; a_{k+1,i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} & = \boxed{0}, \\
i = (k+1) - \ell(k+1) & \longrightarrow \boxed{a_{k+1,i} \neq 0} & \Rightarrow \boxed{l_{k+1,i} =} \; a_{k+1,i} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} & = \boxed{a_{k+1,i} \neq 0}.
\end{array}\right.$$

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Adaptación a Banda y Perfil (II)

Por tanto, se conservan los semianchos de banda inferior y superior:



Y también los perfiles inferior (por filas) y superior (por columnas):



MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS.
APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY [$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{L}^T$, $\underset{\sim}{A}$ simétrica]

Sea el problema

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\,\bar{x} = \bar{b}} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \textit{Sim.} & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}.$$

La FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY consiste en:

$$\boxed{\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{L}^T} \Longrightarrow \underset{\sim}{L}\,\overbrace{\underset{\sim}{D}\,\underbrace{\underset{\sim}{L}^T\,\bar{x}}_{\bar{y}}}^{\bar{z}} = \bar{b} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \underset{\sim}{L}\,\bar{z} &= \bar{b}, \\ \underset{\sim}{D}\,\bar{y} &= \bar{z}, \\ \underset{\sim}{L}^T\bar{x} &= \bar{y}. \end{aligned} \right.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS.
APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

Observamos que es un caso particular de la **Factorización de CROUT** para matrices simétricas en el que

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{L}^T .$$

Debido a la simetría se cumplirá

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{c}_{k+1} & = \bar{f}_{k+1} , \\ \underset{\sim}{U}_k & = \underset{\sim}{L}_k^T , \\ \bar{u}_{k+1} & = \bar{l}_{k+1} , \\ u_{k+1,k+1} & = l_{k+1,k+1} . \end{array} \right.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Por tanto . . .

1-2. **El vector $\bar{l}_{k+1}$ es la solucíón del sistema**:

$$[\underset{\sim}{L}_k \; \underset{\sim}{D}_k] \; \bar{l}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}.$$

3. **Los coeficientes $l_{k+1,k+1}$ y $d_{k+1,k+1}$ verifican**:

$$l_{k+1,k+1} \; d_{k+1,k+1} \; l_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k \, \bar{l}_{k+1}. \qquad (\star)$$

$(\star)$ Donde $\bar{l}_{k+1}$ se habrá calculado previamente.
Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$l_{k+1,k+1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad d_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k \, \bar{l}_{k+1}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

4. **Para** $k = 1$:

$$\underset{\sim}{A}_1 = \underset{\sim}{L}_1\, \underset{\sim}{D}_1\, \underset{\sim}{L}_1^T \Longrightarrow l_{11}\; d_{11}\; l_{11} = a_{11}. \qquad (\ast)$$

5. **Para** $k = n$:

$$\underset{\sim}{A}_n = \underset{\sim}{A} \Longrightarrow \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{L}^T \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}_n, \\ \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}_n. \end{cases}$$

$(\ast)$ Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$l_{11} = 1 \Longrightarrow d_{11} = a_{11}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

Asignar $l_{11} = 1,$

$d_{11} = a_{11}.$

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Resolver} & [\underset{\sim}{L}_k \quad \underset{\sim}{D}_k]\ \bar{l}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}. \\ \text{Asignar} & l_{k+1,k+1} = 1, \\ & d_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k\, \bar{l}_{k+1}. \end{array} \right.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Notas:

1. Los sistemas $[\underset{\sim}{L}_k \; \underset{\sim}{D}_k] \; \bar{l}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}$ se resuelven en dos fases:

$$\underset{\sim}{L}_k \; \overbrace{\underset{\sim}{D}_k \; \bar{l}_{k+1}}^{\bar{m}_{k+1}} = \bar{f}_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \underset{\sim}{L}_k \; \bar{m}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}, \\ \qquad\qquad\quad \searrow \\ \underset{\sim}{D}_k \; \bar{l}_{k+1} = \bar{m}_{k+1}. \end{array} \right.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS (continuación)

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS:

Resolver
$$\underset{\sim}{L}\,\bar{z} = \bar{b},$$
$$\underset{\sim}{D}\,\bar{y} = \bar{z},$$
$$\underset{\sim}{L}^T\,\bar{x} = \bar{y}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

CONDICIONES DE EXISTENCIA

Son las mismas que en el caso de la **Factorización de CROUT**.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

$$l_{11} = 1,$$

$$d_{11} = a_{11}$$

```
DO k=1,n-1
```

$$l_{k+1,i} = a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, l_{k+1,j} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = l_{k+1,i} \,/\, d_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,k+1} = 1,$$

$$d_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1,j}\, d_{jj}\, l_{k+1,j}$$

```
ENDDO
```

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: ($\star$)

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}\, x_j \qquad ;\ i = n, \ldots, 1, -1$$

($\star$) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la matriz $\underset{\sim}{L}$ por columnas.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] (⋆)

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ; \; i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ; \; i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i \qquad ; \; i = 1, \ldots, n$$

$$x_j = x_j - \qquad l_{ij}\, x_i \qquad ; \; j = 1, \ldots, i-1 \qquad ; \; i = n, \ldots, 2, -1$$

(⋆) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil. Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la matriz $\underset{\sim}{L}$ por filas.

ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY: Programación (–)

Es fácil comprobar que

- podemos almacenar $\underset{\sim}{L}$ Y $\underset{\sim}{D}$ sobre la parte inferior de $\underset{\sim}{A}$;
- podemos almacenar $\bar{z}$, $\bar{y}$ y $\bar{x}$ sobre $\bar{b}$;

Así...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ l_{21} & d_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

DO k=1,n-1

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, a_{k+1,j} \quad ; \; i = 2, \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} \,/\, a_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$a_{k+1,k+1} \leftarrow a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}\, a_{jj}\, a_{k+1,j}$$

ENDDO

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: ($\star$)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ji}\, b_j \qquad ;\ i = n-1, \ldots, 1, -1$$

($\star$) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la parte inferior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por columnas.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] ($\star$)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$b_j \leftarrow b_j - a_{ij}\, b_i \qquad ;\ j = 1, \ldots, i-1 \qquad ;\ i = n, \ldots, 2, -1$$

($\star$) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil.
Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la parte inferior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por filas.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Sea la matriz $\underset{\sim}{A}$ tal que

$$
\underset{\sim}{A} = \begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \text{SIM.} \\
0 & 0 & a_{i,i-\ell(i)} & \cdots & \cdots & a_{i,i-1} & a_{ii}
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \text{ fila } i \end{array} \\
\begin{array}{r} \downarrow \\ \text{columna } i \end{array} &
\end{array}
$$

donde

$$
\left\{\begin{array}{lll}
\ell(i) & \equiv & \text{semiancho de banda inferior de la fila } i, \\
 & \equiv & \text{semiancho de banda superior de la columna } i.
\end{array}\right.
$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Examinamos en detalle el cálculo de la fila $k+1$ de $\underset{\sim}{L}$.

$$l_{k+1,i} = a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, l_{k+1,j} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = l_{k+1,i} \,/\, d_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k \quad \longrightarrow \text{IRRELEVANTE}$$

FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY: Adaptación a Banda y Perfil (Ic)

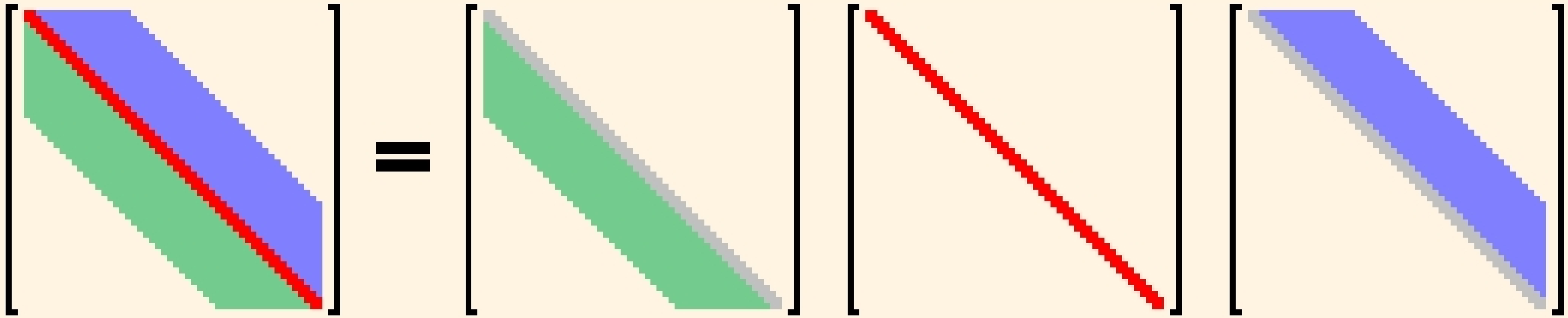
MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Observamos que (a falta de dividir por los elementos d_{ii}) . . .

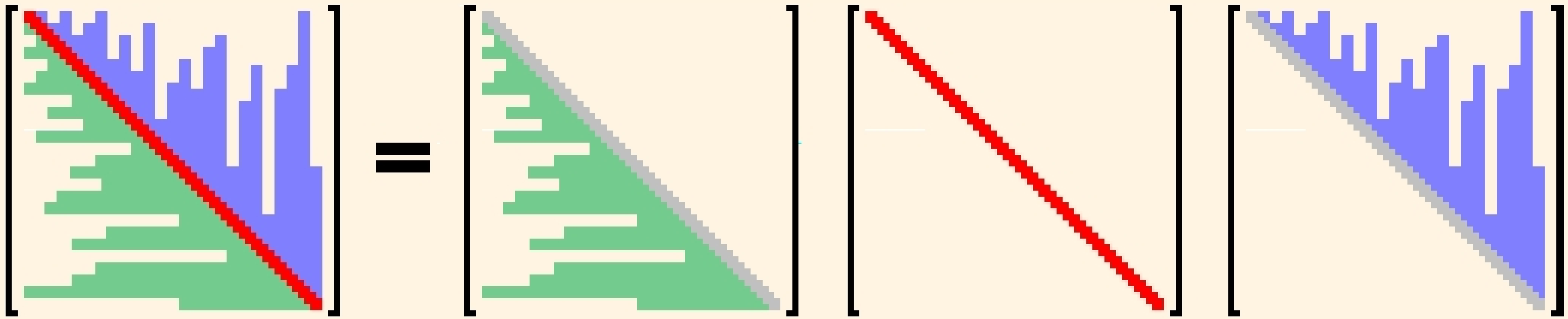
$$\begin{cases} i=1 & \longrightarrow \quad \boxed{a_{k+1,i}=0} \;\Rightarrow\; \boxed{l_{k+1,i}=} \; a_{k+1,i}-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\,l_{k+1,j} = \boxed{0}, \\ i=2 & \longrightarrow \quad \boxed{a_{k+1,i}=0} \;\Rightarrow\; \boxed{l_{k+1,i}=} \; a_{k+1,i}-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\,l_{k+1,j} = \boxed{0}, \\ \vdots & \\ i=(k+1)-\ell(k+1)-1 & \longrightarrow \quad \boxed{a_{k+1,i}=0} \;\Rightarrow\; \boxed{l_{k+1,i}=} \; a_{k+1,i}-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\,l_{k+1,j} = \boxed{0}, \\ i=(k+1)-\ell(k+1) & \longrightarrow \quad \boxed{a_{k+1,i}\neq 0} \;\Rightarrow\; \boxed{l_{k+1,i}=} \; a_{k+1,i}-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\,l_{k+1,j} = \boxed{a_{k+1,i}\neq 0}. \end{cases}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Por tanto, se conservan los semianchos de banda inferior y superior:



Y también los perfiles inferior (por filas) y superior (por columnas):



MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ: ($\star$)

```
DO k=1,n-1
```

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} - \sum_{j=\max\{i-\ell(i),(k+1)-\ell(k+1)\}}^{i-1} a_{ij}\, a_{k+1,j} \quad ; \; i = \left[(k+1)-\ell(k+1)+1\right], \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} \;/\; a_{ii} \quad ; \; i = \left[(k+1)-\ell(k+1)\right], \ldots, k$$

$$a_{k+1,k+1} \leftarrow a_{k+1,k+1} - \sum_{j=(k+1)-\ell(k+1)}^{k} a_{k+1,j}\, a_{jj}\, a_{k+1,j}$$

```
ENDDO
```

($\star$) $\ell(i)$ es el semiancho de banda inferior de la fila i.
Este valor indica que el primer elemento no nulo de la fila i es el coeficiente $a_{i,i-\ell(i)}$.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: ($\star$)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=i-\ell(i)}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$b_j \leftarrow b_j - a_{ij}\, b_i \qquad ;\ j = [i-\ell(i)], \ldots, i-1 \quad ;\ i = n, \ldots, 2, -1$$

($\star$) $\ell(i)$ es el semiancho de banda inferior de la fila i.
Este valor indica que el primer elemento no nulo de la fila i es el coeficiente $a_{i,i-\ell(i)}$.

CONDICIONES DE VINCULACIÓN [coacciones] (I)

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1v} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2v} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3v} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & a_{v3} & \cdots & a_{vv} & \cdots & a_{vn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nv} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_v \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_v \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r_v \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix},$$

con la coacción adicional

$$x_v = p_v, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} v = \text{GRADO DE LIBERTAD (GDL) COACCIONADO}, \\ p_v = \text{VALOR PRESCRITO (conocido)}, \\ r_v = \text{REACCIÓN (desconocida)}. \end{cases}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

El planteamiento anterior puede reescribirse en la forma

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_v \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} b_1 - a_{1v}\, p_v \\ b_2 - a_{2v}\, p_v \\ b_3 - a_{3v}\, p_v \\ \vdots \\ p_v \\ \vdots \\ b_n - a_{nv}\, p_v \end{Bmatrix},
$$

con la ecuación adicional

$$
r_v = \begin{bmatrix} a_{v1} & a_{v2} & a_{v3} & \cdots & a_{vv} & \cdots & a_{vn} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_v \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} - b_v,
$$

que se utiliza una vez resuelto el sistema anterior.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

TRATAMIENTO DE LAS CONDICIONES DE VINCULACIÓN [coacciones]

Dado el sistema $\underset{\sim}{A}\bar{x} = \bar{b} + \bar{r}$, con algunas $x_v = p_v$, se procede de la siguiente manera:

1) Al factorizar se ignoran filas y columnas correspondientes a GDL prescritos (v).
2) Las columnas correspondientes a GDL prescritos pasan restando a los términos independientes multiplicadas por los valores prescritos ($-a_{iv}\, p_v$).
3) Las filas correspondientes a GDL prescritos (a_{vj}) se usan *a posteriori* para calcular las reacciones (r_v).

Luego, los datos almacenados en filas y columnas correspondientes a GDL prescritos

♣ no se alteran durante la factorización y

♡ se pueden utilizar para resolver múltiples sistemas con la misma matriz y distintos
  - ▷ términos independientes o
  - ▷ valores prescritos. (⋆)

(⋆) **¡OJO!**: pueden cambiarse los valores prescritos (p_v), pero no pueden cambiarse los GDL prescritos (v).

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS.
APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

CODIFICACIÓN DEL ALMACENAMIENTO (§)

$$
\underset{\sim}{A} = \begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & & & & & & & \\
* & * & & & & & \text{SIM.} & & \\
0 & * & * & & & & & & \\
0 & * & \cdots & * & & & & & \\
0 & 0 & * & \cdots & * & & & & \\
0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & & & \\
0 & 0 & 0 & a_{i,i-\ell sbi} & \cdots & a_{i,i-1} & a_{ii} & & \\
0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\
\longrightarrow \text{fila } i \\
\\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

(§) PARTE TRIANGULAR SUPERIOR EN PERFIL POR COLUMNAS $\Longleftrightarrow$ PARTE TRIANGULAR INFERIOR EN PERFIL POR FILAS.

http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

IMPLEMENTACIÓN: Cholesky para matrices en perfil (Ib)

ALMACENAMIENTO EN PERFIL (*)

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A} & \text{se almacena en} \quad \bar{v} = [a_{11}, \cdots, a_{i,i-\ell sbi}, \cdots, \cdots, a_{i,i-1}, a_{ii}, \cdots, \cdots, a_{nn}] \\ a_{ij} & \rightsquigarrow \quad v_k, \quad \text{con} \quad k = \mathtt{lpij} \equiv \text{puntero del coeficiente } a_{ij}. \end{cases}$$

Si $\mathtt{lp(i)} \equiv$ puntero del coeficiente a_{ii}, entonces:

$$\begin{cases} \mathtt{lpii} = |\mathtt{lp(i)}| & \equiv \text{puntero de } a_{ii}, \quad (**) \\ \mathtt{lsbi} = \mathtt{lpii} - (|\mathtt{lp(i-1)}| + 1) & \equiv \text{semiancho de banda inferior de la fila } \mathtt{i}, \quad (**) \\ \mathtt{lpi\varnothing} = \mathtt{lpii} - \mathtt{i}, & \\ \mathtt{lpij} = \mathtt{lpi\varnothing} + \mathtt{j} & \equiv \text{puntero de } a_{ij}, \text{ con } \mathtt{i} - \mathtt{lsbi} \le \mathtt{j} \le \mathtt{i}, \end{cases}$$

(*) Sistema de punteros y variables utilizado en la subrutina `SLE$Solver_LDLt_CP()`.

(**) Se utilizan valores absolutos porque esta subrutina cambia los signos de los punteros de los GDL coaccionados.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS.
APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

PROGRAMACIÓN

1) CAMBIAR SIGNO A PUNTEROS DE GDL COACCIONADOS.

2) **FACTORIZAR:** $\boxed{\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{L}^T}$ $(\,\star\,)$

3) INICIALIZAR REACCIONES E IMPONER CONDICIONES DE VINCULACIÓN.

4) **RESOLVER LOS SISTEMAS:** $\boxed{\underset{\sim}{L}\, \bar{z} = \bar{b}, \quad \underset{\sim}{D}\, \bar{y} = \bar{z}, \quad \underset{\sim}{L}^T\, \bar{x} = \bar{y}}$ $(\,\star\,)$

5) CALCULAR REACCIONES.

6) RESTAURAR SIGNO A PUNTEROS DE GDL COACCIONADOS.

$(\,\star\,)$ **IGNORANDO FILAS Y COLUMNAS CORRESPONDIENTES A GDL COACCIONADOS.**

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ: $(\ast)$

```
DO k=2,n
```

$$a_{ki} \leftarrow a_{ki} - \sum_{j=\max\{i-\ell sbi,\, k-\ell sbk\}}^{i-1} a_{ij}\, a_{kj} \quad ; \; i = [k-\ell sbk+1], \ldots, k-1$$

$$a_{ki} \leftarrow a_{ki} \;/\; a_{ii} \quad ; \; i = [k-\ell sbk], \ldots, k-1$$

$$a_{kk} \leftarrow a_{kk} - \sum_{j=k-\ell sbk}^{k-1} a_{kj}\, a_{jj}\, a_{kj}$$

```
ENDDO
```

$(\ast)$ ℓsbi es el semiancho de banda inferior de la fila i.
Este valor indica que el primer elemento no nulo de la fila i es el coeficiente $a_{i,i-\ell sbi}$.

MÉTODOS NUMÉRICOS AVANZADOS. APLICACIONES EN INGENIERÍA.
F. Navarrina, I. Colominas, M. Casteleiro, H. Gómez, J. París.
http://caminos.udc.es/info/asignaturas/617/ApuntesYMaterialPedagogico/apuntes.htm
ETSICCP-UDC (2009), ISBN-13 : 978 - 84 - 692 - 1034 - 5

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: (*)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=i-\ell sbi}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$b_j \leftarrow b_j - a_{ij}\, b_i \qquad ;\ j = [i-\ell sbi], \ldots, i-1 \quad ;\ i = n, \ldots, 2, -1$$

(*) ℓsbi es el semiancho de banda inferior de la fila i.
Este valor indica que el primer elemento no nulo de la fila i es el coeficiente $a_{i,i-\ell sbi}$.