

Un ingeniero desea analizar las vibraciones transversales de una membrana circular de radio exterior R_E , y, en particular, analizar la menor frecuencia de vibración natural. Asimismo y con la finalidad de dotar de mayor generalidad al estudio se plantea la posibilidad de estudiar membranas con forma de corona circular de radio interior $R_I > 0$. La membrana se encuentra directamente apoyada en sus bordes. Así, en el caso de una geometría circular estará apoyada en todo su borde exterior mientras que si la geometría corresponde a una corona circular, estará apoyada en los bordes interior y exterior. La membrana está fabricada de un material perfectamente elástico con densidad por unidad de superficie σ y está sometida a una tensión constante τ en todos sus puntos, siendo σ y τ constantes reales y positivas. Si se asumen las hipótesis de pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones y se analizan sólo los fenómenos con simetría radial, este estudio se puede reducir de forma simplificada al análisis de un problema de ondas unidimensional que se rige por la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right), \quad (1)$$

siendo $u(r, t)$ los movimientos transversales de la membrana, r el radio, t el tiempo y $\alpha^2 = \tau/\sigma$, con $\alpha > 0$.

1. Resolver analíticamente el problema de autovalores planteado para el caso de la membrana con geometría circular completa y obtener la menor frecuencia de vibración natural.
2. Resolver numéricamente el problema de autovalores asociado para el caso de la membrana circular y obtener la menor frecuencia de vibración (correspondiente a la menor frecuencia natural de vibración) utilizando diferencias finitas centradas con aproximación de segundo orden.
3. Resolver numericamente el problema de autovalores para el caso de la membrana con geometría de corona circular ($R_I > 0$).
4. Aplicar un método de reducción de autovalores para calcular las n_{frec} primeras frecuencias y modos propios de vibración con simetría radial de la membrana, siendo n_{frec} pequeño.

FECHA LÍMITE DE ENTREGA:

- El último día de clase del curso, 15 de mayo de 2025, para ambas oportunidades (mayo y junio).

REQUISITOS DE LOS PROGRAMAS FORTRAN

- a) Los programas tienen que estar diseñados de forma modular, es decir, existirá un programa principal desde el que serán llamadas las distintas subrutinas o funciones.
- b) A medida que se vaya desarrollando el programa cada módulo debe ser comprobado por separado.
- c) Tanto el programa principal como los módulos tienen que estar comentados.
 - c.1) Al principio del programa principal y de cada subrutina o función se indicará su nombre, su propósito y una breve descripción del trabajo que realiza esa parte del programa.
 - c.2) A continuación se describirá el significado de sus variables más importantes, cuyos nombres deberán reflejar el tipo de información que contienen.
 - c.3) A lo largo de cada módulo se dejarán líneas en blanco para separar los diferentes bloques de instrucciones, y se añadirán las explicaciones que se consideren oportunas para comprender cómo funciona cada una de sus partes y el programa en su conjunto.

DOCUMENTACIÓN A ENTREGAR

Cada estudiante entregará el trabajo de curso en su cuenta del Campus Online de la asignatura en una tarea creada a tal fin. El estudiante deberá crear en esa tarea de su cuenta un directorio, denominado **Trabajo**, en el que se incluirán únicamente el/los archivo/s que contenga/n el código fuente y los archivos de datos necesarios para la ejecución del mismo (si fuese el caso).

Por otro lado, el estudiante creará en esa tarea de su cuenta de usuario otra carpeta denominada **Memoria** en la que guardará un ejemplar de la *memoria* completa del trabajo. La memoria debe elaborarse íntegramente mediante un editor de textos con el que se puedan incluir fórmulas, tablas y figuras y se incluirá en la carpeta del estudiante en el servidor en formato PDF. La memoria también se imprimirá en papel y se entregará personalmente al profesor responsable de los trabajos de curso en el plazo establecido. Todo el material adicional que el estudiante desee subir al campus online (archivos de resultados correspondientes a ejemplos y pruebas que se presenten en la memoria, hojas de cálculo complementarias, etc.) se añadirán en una carpeta denominada **Otros** que el estudiante creará a tal efecto si lo considera oportuno.

La memoria deberá contener, al menos, los siguientes apartados:

- a) Una portada en la que se indique el nombre de la titulación, el nombre de la asignatura, el curso académico y el nombre del autor. También se indicará el nombre del programa (o programas) y el nombre de los ficheros de resultados.
- b) La formulación y desarrollo numérico completo del problema incluyendo el procedimiento empleado para la discretización de la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno.
- c) Un apartado en el que se comente cada uno de los programas o subprogramas de ordenador realizados, incluyendo los siguientes puntos:
 - c.1) Documentación del programa/subprograma: características, datos necesarios para ejecutarlo e instrucciones para introducirlos, resultados y limitaciones que presenta, etc.
 - c.2) Esquema de funcionamiento de cada programa o subprograma.
- d) El código fuente completo del programa

- e) Un apartado en el que se presenten, se analicen (física y numéricamente) y se comparen los resultados obtenidos a través de gráficos, comentando aspectos relativos a número de operaciones de cada algoritmo, condiciones de convergencia (en su caso), número de iteraciones (si procede), etc. Se valorará especialmente la discusión y análisis de los resultados obtenidos en función de los diversos parámetros y constantes del problema. Este estudio se deberá realizar para cada uno de los modelos que se propongan en el enunciado.

Nota: La memoria debe incluir todos los aspectos indicados anteriormente para ser aceptada.

NOTAS:

Para la resolución del problema es posible utilizar el método de separación de variables teniendo en cuenta las condiciones de contorno correspondientes. Así, esta descomposición se plantea como:

$$u(r, t) = \phi(r) T(t), \quad (2)$$

lo que conduce al problema de autovalores:

$$-\frac{d}{dr} \left[r \frac{d\phi}{dr} \right] = \lambda [r \phi] \quad (3)$$

siendo la frecuencia de vibración:

$$\nu = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\lambda} \quad (4)$$

Las condiciones de contorno del problema (3) se imponen a partir de las condiciones de contorno del problema original teniendo en cuenta la descomposición propuesta en (2).

La ecuación diferencial se discretizará como:

$$\left. \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\phi}{dr} \right] \right|_i \approx \frac{\left[r \frac{d\phi}{dr} \right]_{i+\frac{1}{2}} - \left[r \frac{d\phi}{dr} \right]_{i-\frac{1}{2}}}{h} \quad \rightarrow \quad \boxed{\left. \frac{d}{dr} \left[r \frac{d\phi}{dr} \right] \right|_i \approx \frac{r_{i+\frac{1}{2}} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} - r_{i-\frac{1}{2}} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h}}{h}} \quad (5)$$

siendo h la separación entre puntos de discretización y:

$$r_{i+\frac{1}{2}} = r_i + \frac{h}{2}, \quad y \quad r_{i-\frac{1}{2}} = r_i - \frac{h}{2} \quad (6)$$

Esto conduce a un problema de autovalores de tipo:

$$\mathbf{K} \phi = \lambda \mathbf{M} \phi \quad (7)$$

Si se descompone la matriz \mathbf{K} como $\mathbf{K} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$ entonces el algoritmo de Mises inverso con reducción de autovalores para obtener los primeros \mathbf{nfrec} modos de vibración distintos será:

```

do ifrec=1,nfrec
   $\mathbf{w}_0 = \{1 \ 0 \dots 0\}$ 
  do k=0,... (hasta convergencia)
     $\mathbf{L} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{w}_k$ 
     $\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}$ 
     $\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1}$ 
     $\mathbf{L}^T \mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1}$ 
     $\phi_{k+1}^{ifrec} = \frac{\mathbf{w}_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|}$ 
     $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{M} \phi_{k+1}^{ifrec}$ 
  do jfrec=1,ifrec-1
     $\mathbf{p} = \mathbf{K} \phi^{jfrec}$ 
     $\eta = \mathbf{p} \cdot \phi_{k+1}^{ifrec}$ 
     $\mathbf{r} = \rho^{jfrec} \eta \mathbf{p}$ 
     $\mathbf{w}_{k+1} \leftarrow \mathbf{w}_{k+1} - \mathbf{r}$ 
  enddo
enddo
 $\rho^{ifrec} = \phi_{k+1}^{ifrec} \cdot \mathbf{w}_{k+1}$ 
 $\lambda^{ifrec} = 1/\rho^{ifrec}$ 
enddo

```