

$$a) \text{ Dado } \bar{v}_k \rightsquigarrow \begin{cases} \bar{v}_{k+1} = \frac{\underline{A} \bar{v}_k}{|\underline{A} \bar{v}_k|} & \Rightarrow \bar{v}_{k+1}^T \bar{v}_{k+1} = 1 \\ \rho_{k+1} = \rho(\bar{v}_{k+1}) = \frac{\bar{v}_{k+1}^T \underline{A} \bar{v}_{k+1}}{\bar{v}_{k+1}^T \bar{v}_{k+1}} = \bar{v}_{k+1}^T \underline{A} \bar{v}_{k+1} \end{cases}$$

Organización del cálculo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dado } \bar{v}_0 \text{ tal que } \bar{v}_0^T \bar{v}_0 = 1 \Leftrightarrow |\bar{v}_0| = 1 \\ \text{Calculemos } \begin{cases} \bar{w}_0 = \underline{A} \bar{v}_0 \\ \rho_0 = \bar{v}_0^T \bar{w}_0 \end{cases} \\ \text{Iteramos para } k=0, 1, \dots \text{ hasta convergencia} \\ \begin{cases} \bar{v}_{k+1} = \bar{w}_k / |\bar{w}_k| \\ \bar{w}_{k+1} = \underline{A} \bar{v}_{k+1} \\ \rho_{k+1} = \bar{v}_{k+1}^T \bar{w}_{k+1} \end{cases} \end{array} \right.$$

Las operaciones matriciales se reducen a los productos

$$\bar{w} = \underline{A} \bar{v}$$

Como  $\underline{A}$  es simétrica y está almacenada en perfil, tenemos que preparar un algoritmo específico para calcularlos.

$$\text{En general, } \bar{w} = \underline{A} \bar{v} \Leftrightarrow w_i = \sum_{j=1, n} a_{ij} v_j ; i=1, \dots, n$$

planteamos este cálculo de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inicializamos } w_i = a_{ii} * v_i ; i=1, \dots, n \\ \text{Para todos los } a_{ij} \neq 0, \\ \quad i > j \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i = w_i + a_{ij} * v_j \\ w_j = w_j + a_{ij} * v_i \end{array} \right. \quad (*) \end{array} \right.$$

(\*) Por simetría,  $a_{ji} = a_{ij}$

Para cada fila  $i$  son distintos de cero los  $a_{ij}$  tales que

$$j \geq i - \underbrace{(l(i) - l(i-1) - 1)}_{\text{semancho de la fila } i}, \quad j \leq i$$

donde  $l(i)$  es la localización del elemento  $a_{ii}$  en el vector que contiene el almacenamiento en perfil. (\*)

Por tanto, el cálculo se plantea en la forma:

```

do i = 1, n
  Wi = aii * Vi
enddo
do i = 2, n
  do j = i - (l(i) - l(i-1) - 1), i - 1
    Wi = Wi + aij * Vj
    Wj = Wj + aij * Vi
  enddo
enddo

```

Almacenamiento en perfil  $\Rightarrow$   $\begin{cases} a_{ii} \text{ almacenados en } P_1 \\ a_{ij} \text{ almacenados en } P_k \\ \text{con } k = l(i) - (i - j) \end{cases}$

luego:

```

do i = 1, n
  k = l(i)
  Wi = Pk * Vi
enddo
do i = 2, n
  do j = i - (l(i) - l(i-1) - 1), i - 1
    k = l(i) - (i - j)
    Wi = Wi + Pk * Vj
    Wj = Wj + Pk * Vi
  enddo
enddo

```

(\*) Se supone que se ha almacenado la parte triangular inferior por filas.

El coste computacional (por iteración) será:

3/34

$$\begin{cases} n & \text{productos} & (\text{elementos en la diagonal de } \underline{A}) \\ 2N & \text{productos y sumas} & (\text{restante elementos de } \underline{A}) \end{cases}$$

donde  $N = l(n) - n \equiv$  número de componentes almacenados, excluyendo los de la diagonal de  $\underline{A}$

Por tanto se realizan  $(n + 4N)$  operaciones.

El tiempo de cálculo es proporcional al número de operaciones, luego el algoritmo tiene un coste computacional

$$T(4N + n) \quad \text{con } N = l(n) - n$$

Para una matriz llena simétrica,  $N = (n^2 - n) / 2 \Rightarrow T(2n^2 - n)$

Para una matriz en perfil simétrica esperamos que

$$T(4N + n) \ll T(2n^2 - n)$$

b) No tiene sentido implementar el método de Jacobi, porque:

- sólo necesitamos el autovalor predominante (no todos ellos)
- la velocidad de convergencia será muy baja (por ser  $n$  grande)

Además, el método de Jacobi es incompatible con el esquema de almacenamiento en perfil porque los elementos inicialmente nulos situados fuera del perfil dejarían de ser nulos a lo largo del proceso, lo que obligaría a almacenar la matriz  $\underline{A}$  como llena simétrica.

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1) Factorizamos  $\tilde{M} = \tilde{L} \tilde{L}^T$

donde  $\tilde{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \leftarrow$  triangular inferior

En este caso se obtiene de forma trivial

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ahora:  $\tilde{K} \tilde{\mu} = \lambda \tilde{M} \tilde{\mu} = \lambda (\tilde{L} \tilde{L}^T) \tilde{\mu} \Rightarrow$

$$\tilde{L}^{-1} \tilde{K} \tilde{\mu} = \lambda \underbrace{\tilde{L}^T \tilde{\mu}}_{\hat{\mu}} \Rightarrow \tilde{\mu} = \tilde{L}^{-T} \hat{\mu}$$

$$\underbrace{(\tilde{L}^{-1} \tilde{K} \tilde{L}^{-T})}_{\hat{K}} \hat{\mu} = \lambda \hat{\mu}$$

luego:  $\tilde{K} \tilde{\mu} = \lambda \tilde{M} \tilde{\mu} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \hat{K} \hat{\mu} = \lambda \hat{\mu} \\ \text{con } \begin{cases} \hat{K} = \tilde{L}^{-1} \tilde{K} \tilde{L}^{-T} \\ \hat{\mu} = \tilde{L}^T \tilde{\mu} \end{cases} \end{matrix}}$

En este caso,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{K} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 4 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \\ \hat{K} \hat{\mu}_i = \lambda_i \hat{\mu}_i, \quad i=1,2,3 \rightsquigarrow \tilde{\mu}_i = \tilde{L}^{-T} \hat{\mu}_i \end{array} \right.$$

Solució analítica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2, \quad \hat{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \lambda_2 = 4, \quad \hat{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \bar{u}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \lambda_3 = 6, \quad \hat{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{array} \right.$$

2) Utilitzem el mètode de HISES:

Dado,  $\hat{v}_k$  tal que  $|\hat{v}_k| = 1$ ,  $\hat{w}_k = \frac{1}{\lambda_k} \hat{v}_k$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{k+1} = \hat{w}_k / |\hat{w}_k| \\ \hat{w}_{k+1} = \hat{K} \hat{v}_{k+1} \\ \rho_{k+1} = \hat{v}_{k+1}^T \hat{w}_{k+1} \end{array} \right.$$

tomem, per exemple,  $\hat{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

(Ver hoja excel)

Observem que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lambda_3 = 6 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{v}_k = \hat{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{array} \right.$$

La convergència és:

$\left. \begin{array}{l} \text{- al autovector} \longrightarrow \text{lineal, com FAC} = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right| = 2/3 \\ \text{- al autovalor} \longrightarrow \text{lineal, com FAC} = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right|^2 = 4/9 \end{array} \right\} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  Necessito bastants iteracions, i convergo abans el autovalor.

3) Para obtener el siguiente autovector tendríamos que aplicar la reducción:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\underline{K}}}^1 &= \hat{\underline{\underline{K}}} - \lambda_3 \hat{\underline{\underline{u}}}_3 \hat{\underline{\underline{u}}}_3^T \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 4 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} - 6 \begin{Bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/2 & \sqrt{2}/2 & -3/2 \\ \sqrt{2}/2 & 2/2 & \sqrt{2}/2 \\ -3/2 & \sqrt{2}/2 & 5/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aplicando ahora MISES a  $\hat{\underline{\underline{K}}}^1$  se obtendrían  $\hat{\underline{\underline{u}}}_2$  y  $\lambda_2$  para obtener el último autovector volveríamos a aplicar la reducción

$$\hat{\underline{\underline{K}}}^2 = \hat{\underline{\underline{K}}}^1 - \lambda_2 \hat{\underline{\underline{u}}}_2 \hat{\underline{\underline{u}}}_2^T$$

Aplicando finalmente MISES a  $\hat{\underline{\underline{K}}}^2$  se obtendría  $\hat{\underline{\underline{u}}}_1$  y  $\lambda_1$ .  
(Ver hoja excel)

La convergencia a  $\hat{\underline{\underline{u}}}_2$  y  $\lambda_2$  es más rápida que la F.A.C. con  $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}| = 1/2$  o  $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}|^2 = 1/4$ .

La convergencia a  $\hat{\underline{\underline{u}}}_1$  y  $\lambda_1$  es instantánea que la F.A.C. con  $|\frac{0}{\lambda_1}| = 0$  o  $|\frac{0}{\lambda_1}|^2 = 0$ .

No es recomendable repetir la reducción de autovectores muchas veces, pues los errores de truncamiento y redondeo van acumulando y pueden falsear el resultado. Por ello, este procedimiento no se puede usar para calcular todos los autovectores de un problema grande. En este caso ( $n=3$ ) no hay problema.

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}} = \lambda \underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}} ; \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} ; \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \underline{\underline{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Phi}}_1 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix}, \underline{\underline{\Phi}}_2 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 5 & | & 5 \\ 4 & | & 0 \\ 5 & | & -4 \end{bmatrix}$$

Análisis de Rayleigh-Ritz:

$$\hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 & 6 \\ 6 & 82 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 & 5 \\ 5 & 41 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{\alpha}} = \hat{\rho} \hat{\underline{\underline{M}}} \underline{\underline{\alpha}} ; \hat{\underline{\underline{K}}} = \begin{bmatrix} 84 & 6 \\ 6 & 82 \end{bmatrix} ; \hat{\underline{\underline{M}}} = \begin{bmatrix} 82 & 5 \\ 5 & 41 \end{bmatrix} ; \underline{\underline{\alpha}} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{u}}^R = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\alpha}} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} ; \underline{\underline{u}}^R \approx \underline{\underline{u}} ; \hat{\rho} \approx \lambda$$

Solución analítica del problema original (\*):

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & , \quad \underline{\underline{u}}_1 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \lambda_2 = 2 & , \quad \underline{\underline{u}}_2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix} \\ \lambda_3 = 3 & , \quad \underline{\underline{u}}_3 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

(\*) Se plantea  $\det(\underline{\underline{K}} - \lambda \underline{\underline{M}}) = 0 \Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} (2-\lambda) & -1 & 0 \\ -1 & (4-2\lambda) & -1 \\ 0 & -1 & (2-\lambda) \end{pmatrix} = (4-2\lambda)(2-\lambda)^2 - 2(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{1, 2, 3\}$$

Para cada  $\lambda_i$  se calcula  $\underline{\underline{u}}_i$  tal que  $(\underline{\underline{K}} - \lambda_i \underline{\underline{M}}) \underline{\underline{u}}_i = \underline{\underline{0}}$

y se normaliza de tal modo que:  $\underline{\underline{u}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}}_i = 1$

Solución analítica del problema reducido (\*\*):

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\beta}_1 = 1,024154618 \quad ; \quad \bar{\alpha}_1 = \begin{Bmatrix} 1,105664145 \cdot 10^{-1} \\ -2,429737353 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \quad \leadsto \quad \bar{u}_1^R = \begin{Bmatrix} 5,406833856 \cdot 10^{-1} \\ 4,422656579 \cdot 10^{-1} \\ 5,625510218 \cdot 10^{-1} \end{Bmatrix} \\ \hat{\beta}_2 = 2,004913407 \quad ; \quad \bar{\alpha}_2 = \begin{Bmatrix} -7,895562798 \cdot 10^{-3} \\ 1,567388468 \cdot 10^{-1} \end{Bmatrix} \quad \leadsto \quad \bar{u}_2^R = \begin{Bmatrix} 7,444664202 \cdot 10^{-1} \\ -3,138225119 \cdot 10^{-2} \\ -6,661832014 \cdot 10^{-1} \end{Bmatrix} \end{array} \right.$$

Observamos que  $\begin{cases} \hat{\beta}_1 \approx \lambda_1 & , \quad \bar{u}_1^R \approx \bar{u}_1 \\ \hat{\beta}_2 \approx \lambda_2 & , \quad \bar{u}_2^R \approx \bar{u}_2 \end{cases}$

Las aproximaciones son relativamente buenas porque la base de Ritz  $\{\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2\}$  no estaba mal.

Se observa que la aproximación del autovalor es mejor que la del autovector (efecto debido al cociente de Rayleigh)

(\*\*) se plantea  $\det \left( \hat{K} - \hat{\beta} \hat{M} \right) = 0 \Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} (84 - \hat{\beta} \cdot 82) & (6 - \hat{\beta} \cdot 5) \\ (6 - \hat{\beta} \cdot 5) & (82 - \hat{\beta} \cdot 41) \end{pmatrix} = (84 - 82\hat{\beta})(82 - 41\hat{\beta}) - (6 - 5\hat{\beta})^2 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{10108 \pm \sqrt{10711168}}{6674}$$

Para cada  $\hat{\beta}_i$  se calcula  $\bar{\alpha}_i$  tal que  $(\hat{K} - \hat{\beta}_i \hat{M}) \bar{\alpha}_i = \bar{0}$  y se normaliza de forma que  $\bar{\alpha}_i^T \hat{M} \bar{\alpha}_i = 1$

Finalmente se obtienen los  $\bar{u}_i^R = \hat{\Phi} \bar{\alpha}_i$  que automáticamente están normalizados de forma que  $(\bar{u}_i^R)^T \hat{M} (\bar{u}_i^R) = 1$



Métodos de HISES:

Dado  $\bar{v}_k$ ,

se calcula

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_{k+1} = \frac{\underline{A} \bar{v}_k}{|\underline{A} \bar{v}_k|} \Rightarrow |\bar{v}_{k+1}| = 1 \\ \rho_{k+1} = \rho(\bar{v}_{k+1}) = \frac{\bar{v}_{k+1}^T \underline{A} \bar{v}_{k+1}}{\bar{v}_{k+1}^T \bar{v}_{k+1}} = \bar{v}_{k+1}^T \underline{A} \bar{v}_{k+1} \end{array} \right.$$

Podemos organizar el cálculo en la forma:

Dado  $\bar{v}_0$  tal que  $|\bar{v}_0| = 1$

$$\text{Calculamos } \left\{ \begin{array}{l} \bar{w}_0 = \underline{A} \bar{v}_0, \quad w_0 = |\bar{w}_0| \\ \rho_0 = \bar{v}_0^T \bar{w}_0 \end{array} \right.$$

Iteramos para  $k = 0, 1, \dots$  hasta convergencia

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_{k+1} = \bar{w}_k / w_k \\ \bar{w}_{k+1} = \underline{A} \bar{v}_{k+1}, \quad w_{k+1} = |\bar{w}_{k+1}| \\ \rho_{k+1} = \bar{v}_{k+1}^T \bar{w}_{k+1} \end{array} \right.$$

Las operaciones matriciales se reducen a los productos

$$\bar{w} = \underline{A} \bar{v}$$

Como  $\underline{A}$  es una matriz vacía, tenemos que preparar un algoritmo específico para calcularlos.

En general,  $\bar{w} = \underline{A} \bar{v} \Leftrightarrow w_i = \sum_{j=1, n} a_{ij} \cdot v_j ; i=1, \dots, n$

Planteamos este cálculo de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Inicializamos } w_i = 0 ; i=1, \dots, n \\ \text{Para todos los } a_{ij} \neq 0, \quad w_i = w_i + a_{ij} \cdot v_j \end{array} \right.$$

El almacenamiento de la matriz  $A$  se realiza de la forma <sup>10/34</sup> siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{z} \equiv \text{n}^\circ \text{ de coeficientes almacenados (integer * 4)} \\ p(\bar{z}) \equiv \text{vector donde se almacenan secuencialmente los} \\ \text{coeficientes } a_{ij} \text{ no nulos (real * 8)} \\ ip(\bar{z}) \equiv \text{vector que indica la fila de cada uno de los} \\ \text{coeficientes anteriores (integer * 4)} \\ jp(\bar{z}) \equiv \text{vector que indica la columna de cada uno de los} \\ \text{coeficientes anteriores. (integer * 4)} \end{array} \right.$$

Es decir que para  $l = 1, 2, \dots, \bar{z}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} p(l) \text{ contiene el valor } a_{ij} \\ ip(l) \text{ " " " del índice } i \text{ (fila)} \\ jp(l) \text{ " " " " " " } j \text{ (columna)} \end{array} \right.$$

El algoritmo se puede escribir en la forma:

```
do i = 1, n
  Wi = 0.
enddo
do l = 1, z
  i = ip(l)
  j = jp(l)
  Wi = Wi + p(l) * Vj
enddo
```

el coste computacional (por iteración) sea:

$2z$  productos y sumas.

Por tanto se realizan  $(2z)$  operaciones

El tiempo de cálculo es proporcional al número de operaciones, luego el algoritmo tiene un coste computacional

$$T(2z).$$

Para una matriz llena,  $z = n^2 \Rightarrow T(2n^2)$

Para una matriz vacía esperamos que

$$T(2z) \ll T(2n^2).$$

$$a) \underline{A} \underline{u} = \lambda \underline{u} ; \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluciones analíticas (\*):

$$\begin{cases} \lambda_1 = -4, & \underline{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \lambda_2 = 2, & \underline{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \lambda_3 = 3, & \underline{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Computamiento del algoritmo:

Partimos de  $\underline{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ,  $|\underline{v}_0| = 1$

Observamos que  $\underline{v}_0 = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \alpha_3 \underline{u}_3 = [\underline{u}_1 \mid \underline{u}_2 \mid \underline{u}_3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \underline{v}_0$$

(para ser ortogonal lo restringimos por las autovalores)

partiendo:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

luego  $\underline{v}_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \underline{u}_1 + 0 \cdot \underline{u}_2 + \frac{1}{3} \underline{u}_3 \Rightarrow$  tiene componentes en  $\underline{u}_1$  y  $\underline{u}_3$   
pero no en  $\underline{u}_2$

(\*) Se plantea  $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} (-1-\lambda) & -3 & 0 \\ -3 & (-1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (3-\lambda) \end{pmatrix} = (3-\lambda)((1+\lambda)^2 - 9) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{-4, 2, 3\}$$

para cada  $\lambda_i$  se calcula  $\underline{u}_i$  tal que  $(\underline{A} - \lambda_i \underline{I}) \underline{u}_i = \underline{0}$   
y se normaliza de forma que  $\underline{u}_i^T \underline{u}_i = 1$ .

El algoritmo converge a  $\lambda_1 = -4$  porque éste es el mayor autovalor en valor absoluto.

el vector  $\bar{v}_k$  oscila entre  $+\bar{u}_1$  y  $-\bar{u}_1$  porque  $\lambda_1 < 0$ .

Por eso, en este caso

$$\rho_k \rightarrow \lambda_1 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

$$\bar{v}_k \rightarrow \begin{cases} +\bar{u}_1 & \text{cuando } k \rightarrow \infty \text{ y } k \text{ es par} \\ -\bar{u}_1 & \text{cuando } k \rightarrow \infty \text{ y } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

El método funciona según lo previsto por lo que no parece que haya ningún error de proporción.

b) el mayor autovalor es  $\lambda_3 = 3$ , aunque es el segundo mayor en valor absoluto.

para poder obtenerlos tendríamos que aplicar la reducción:

$$\begin{aligned} \underline{A}' &= \underline{A} - \lambda_1 \bar{u}_1 \bar{u}_1^T \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - (-4) \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando ahora MISES a  $\underline{A}'$  se obtendrían  $\bar{u}_3$  y  $\lambda_3$ .

podríamos partir del mismo  $\bar{v}_0$  que se empleó anteriormente pues tiene componente en  $\bar{u}_3$ .

$$a) \quad \underline{A} \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{A} \underline{U} = \underline{U} \underline{\Lambda} \\ \text{con } \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}, \underline{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\} \end{cases}$$

$$\gamma \quad \underline{U}^T \underline{U} = \underline{I}$$

$$\text{después } \begin{cases} \underline{U}^{-1} = \underline{U}^T \\ \underline{A} = \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{U}^{-1} = \underline{U} \underline{\Lambda} \underline{U}^T \end{cases}$$

$$\text{En este caso: } \begin{cases} \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mu(1-\varepsilon) & & \\ & \mu & \\ & & \mu(1+\varepsilon) \end{bmatrix}, \mu = 10000 \\ \underline{U} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.80 & 0.48 \\ -0.80 & 0.00 & 0.60 \\ 0.48 & -0.60 & 0.64 \end{bmatrix} \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{después } \underline{A} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.80 & 0.48 \\ -0.80 & 0.00 & 0.60 \\ 0.48 & -0.60 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu(1-\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu(1+\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.36 & -0.80 & 0.48 \\ 0.80 & 0.00 & -0.60 \\ 0.48 & 0.60 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \mu = 10000 \quad \gamma \quad \varepsilon \in \{2^{-6}, 2^{-3}, 2^{-1}, 2\} \Rightarrow$$

$$\varepsilon = 2^{-6} \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} 10015,75 & 90 & 21 \\ 90 & 9956,25 & 120 \\ 21 & 120 & 10028 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = 2^{-3} \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} 10126 & 720 & 168 \\ 720 & 9650 & 960 \\ 168 & 960 & 10224 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 2^{-1} \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} 10504 & 2880 & 672 \\ 2880 & 8600 & 3840 \\ 672 & 3840 & 10896 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = 2 \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} 12016 & 11520 & 2688 \\ 11520 & 4400 & 15360 \\ 2688 & 15360 & 13584 \end{bmatrix}$$

$$(*) \text{ Se comprueba que } \underline{U}^T \underline{U} = \underline{U} \underline{U}^T = \underline{I}$$

b) En todos los casos se parte del vector inicial

$$\bar{v}_0 = \begin{Bmatrix} 0.856 \\ -0.480 \\ -0.192 \end{Bmatrix}, \quad |\bar{v}_0| = 1$$

Escribimos  $\bar{v}_0$  en la base  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ :

$$\bar{v}_0 = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \alpha_3 \bar{u}_3 = [\bar{u}_1 | \bar{u}_2 | \bar{u}_3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \underline{U} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{U}^{-1} = \underline{U}^T \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \underline{U}^T \bar{v}_0$$

después:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.36 & -0.80 & 0.48 \\ 0.80 & 0.00 & -0.60 \\ 0.48 & 0.60 & 0.64 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.856 \\ -0.480 \\ -0.192 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Por tanto,  $\bar{v}_0 = 0.6 \bar{u}_1 + 0.8 \bar{u}_2 + 0.0 \bar{u}_3$

$\Rightarrow \bar{v}_0$  no tiene componente en  $\bar{u}_3$ !

de teoría del método de MISES predice que si  $\bar{v}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{u}_i$ ,  
entonces  $\bar{w}_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i)^k \bar{u}_i$ ,  $\bar{v}_k = \bar{w}_k / |\bar{w}_k|$

En nuestro caso:

$$\bar{v}_k = \frac{0.6 (\lambda_1)^k \bar{u}_1 + 0.8 (\lambda_2)^k \bar{u}_2}{\sqrt{(0.6)^2 (\lambda_1)^{2k} + (0.8)^2 (\lambda_2)^{2k}}}, \quad |\bar{v}_k| = 1$$

Por ser  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  ortogonales

después:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \mu(1-\varepsilon) \\ \lambda_2 = \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{v}_k = \frac{0.6 (1-\varepsilon)^k \bar{u}_1 + 0.8 \bar{u}_2}{\sqrt{(0.6)^2 (1-\varepsilon)^{2k} + (0.8)^2}}$$

Además:

$$f_k = f(\bar{v}_k) = \frac{\bar{v}_k^T A \bar{v}_k}{\bar{v}_k^T \bar{v}_k} = \bar{v}_k^T \tilde{A} \bar{v}_k = \bar{v}_k^T (A \bar{v}_k)$$

Pero

$$\tilde{A} \tilde{v}_k = \frac{1}{\sqrt{(0.6)^2 (1-\varepsilon)^{2k} + (0.8)^2}} \left( \underbrace{0.6 (1-\varepsilon)^k}_{\lambda_1 \tilde{u}_1} \tilde{A} \tilde{u}_1 + 0.8 \underbrace{\tilde{A} \tilde{u}_2}_{\lambda_2 \tilde{u}_2} \right)$$

luego

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k^T (\tilde{A} \tilde{v}_k) &= \frac{1}{(0.6)^2 (1-\varepsilon)^{2k} + 0.8^2} \left( (0.6)^2 (1-\varepsilon)^{2k} \lambda_1 + (0.8)^2 \lambda_2 \right) \\ &= \mu \frac{(0.6)^2 (1-\varepsilon)^{2k+1} + (0.8)^2}{(0.6)^2 (1-\varepsilon)^{2k} + 0.8^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$f_k = \mu \frac{0.36 (1-\varepsilon)^{2k+1} + 0.64}{0.36 (1-\varepsilon)^{2k} + 0.64}$$

$$\tilde{v}_k = \frac{0.6 (1-\varepsilon)^k}{\sqrt{0.36 (1-\varepsilon)^{2k} + 0.64}} \begin{Bmatrix} 0.36 \\ -0.80 \\ 0.48 \end{Bmatrix} + \frac{0.8}{\sqrt{0.36 (1-\varepsilon)^{2k} + 0.64}} \begin{Bmatrix} 0.80 \\ 0.00 \\ -0.60 \end{Bmatrix}$$

En los tres primeros casos,  $\varepsilon \in \{2^{-6}, 2^{-3}, 2^{-1}\} \Rightarrow |1-\varepsilon| < 1$ ,

$$\text{luego } \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \mu = 10000 = \lambda_2 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{v}_k = \begin{Bmatrix} 0.80 \\ 0.00 \\ -0.60 \end{Bmatrix} = \tilde{u}_2 \end{cases}$$

En el cuarto caso,  $\varepsilon = 2 \Rightarrow 1-\varepsilon = -1$ ,

$$\text{luego } \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \mu \frac{-0.36 + 0.64}{0.36 + 0.64} = 0.28 \mu = 2800 \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{v}_k = \begin{cases} -0.6 \tilde{u}_1 + 0.8 \tilde{u}_2, & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0.6 \tilde{u}_1 + 0.8 \tilde{u}_2, & \text{si } k \text{ es par} \end{cases} \end{cases}$$

de donde se

- el cociente de Rayleigh no converge a ningún autovalor
- cuando  $k \rightarrow \infty$   $v_k$  oscila entre  $\begin{Bmatrix} 0.424 \\ 0.480 \\ -0.768 \end{Bmatrix}$  y  $\begin{Bmatrix} 0.356 \\ -0.480 \\ -0.192 \end{Bmatrix}$



c) Observamos que las predicciones teóricas se cumplen, pero sólo para valores no muy elevados de  $\kappa$ .

Al principio los valores de  $f_\kappa$  y  $\bar{v}_\kappa$  tienden a lo que predice la teoría. Sin embargo, si se permite que el algoritmo siga iterando el resultado se acaba alejando de la predicción teórica y el método acaba divergiendo a

$$\begin{cases} f_\kappa \rightarrow \lambda_3 = \mu(1 + \epsilon) \\ \bar{v}_\kappa \rightarrow \pm \bar{u}_3 = \pm \begin{cases} 0.48 \\ 0.60 \\ 0.64 \end{cases} \end{cases} \quad (*)$$

donde

$$\begin{cases} \epsilon = 2^{-6} \rightarrow \lambda_3 = 10156,25 \\ \epsilon = 2^{-3} \rightarrow \lambda_3 = 11250 \\ \epsilon = 2^{-1} \rightarrow \lambda_3 = 15000 \\ \epsilon = 2 \rightarrow \lambda_3 = 30000 \end{cases}$$

La "falta de convergencia" se debe a que  $\bar{v}_0$  no tiene componente en  $\bar{u}_3$ , por lo que el método en teoría no puede converger a  $\lambda_3$ , que es el mayor autovalor en valor absoluto.

Sin embargo, los errores de redondeo introducen una pequeña componente en  $\bar{v}_0$  que acaba amplificándose, lo que permite la convergencia finalmente (aunque requiere muchas iteraciones)

En el caso  $\epsilon = 2$ , los autovalores son  $\lambda_1 = -10000$ ,  $\lambda_2 = 10000$ ,  $\lambda_3 = 30000$ . Puesto que el método no converge en teoría a  $\lambda_3$  y  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , estos dos autovalores producen las oscilaciones e/ elevarse a potencias sucesivas, ya que  $(\lambda_1)^k = (-10000)^k$ ,  $(\lambda_2)^k = (10000)^k$ .

(\*) El signo depende de la componente inicial que se amplifica y no tiene importancia.

$$d) \begin{cases} \lambda_2 = \mu = 10000 \\ \lambda_3 = \mu(1+\varepsilon) = 10000(1+\varepsilon) \end{cases}$$

Después el método converge linealmente,

$$\begin{cases} P_k \rightarrow \lambda_3 & \text{con FAC} = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right|^2 = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \\ \bar{v}_k \rightarrow \bar{u}_3 & \text{con FAC} = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right| = \frac{1}{(1+\varepsilon)} \end{cases}$$

En consecuencia,  $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow$  convergencia muy lenta  
de las FAC son:

$$\begin{cases} \varepsilon = 2^{-6} & \rightsquigarrow \frac{1}{(1+\varepsilon)} = 0.989615385, \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 0.969467456 \\ \varepsilon = 2^{-3} & \rightsquigarrow \frac{1}{1+\varepsilon} = 0.888888889, \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 0.790123457 \\ \varepsilon = 2^{-1} & \rightsquigarrow \frac{1}{1+\varepsilon} = 0.666666667, \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 0.444444444 \\ \varepsilon = 2 & \rightsquigarrow \frac{1}{1+\varepsilon} = 0.333333333, \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 0.111111111 \end{cases}$$

lo que explica por qué la velocidad de convergencia es tan diferente.  
de talso convergencia se debe a que  $\bar{v}_0$  no tiene componente  
(solos errores de redondeo) en  $\bar{u}_3$ . Hasta que estos errores se  
hacen suficientemente grande, el método parece converger a  $\lambda_2, \bar{u}_2$ .  
Las oscilaciones del último caso se deben a que  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ,  
por lo que  $(\lambda_1/\lambda_2)^k$  oscila entre +1 y -1 según  $k$  sea par o impar.  
El algoritmo deje de oscilar cuando la amplificación de los errores  
de redondeo permita superar la talso convergencia.

e) Conviene:

- Repetir los cálculos con varios  $\bar{v}_0$  elegidos al azar
- Permitir que el algoritmo siga iterando aunque aparentemente  
haya convergido, por si se ha producido una talso convergencia.

(Ver explicación teórica en "Ejemplos de problemas generalizados")

a) Se comprueba (ver hoja Excel) que

$$\tilde{K}^{-1} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

para calcular el autovalor  $\lambda = \omega^2$  asociados a la frecuencia de vibración predominante  $\omega$  (la menor) podemos utilizar el método de HISES INVERSO.

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{K} \bar{a} = \lambda \tilde{M} \bar{a} \\ \text{con } \tilde{M} = m \tilde{I} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \tilde{K} \bar{a} = (\lambda m) \bar{a} \Leftrightarrow m \tilde{K}^{-1} \bar{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda}\right)}_{\mu} \bar{a}$$

después el menor autovalor  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  se corresponde con el mayor autovalor  $\mu$  del problema

$$\underbrace{(m \tilde{K}^{-1})}_{\tilde{A}} \bar{a} = \mu \bar{a}$$

Aplicamos el método de HISES a este último problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pedo } \bar{v}_0, \quad |\bar{v}_0| = 1 \\ \text{Calculamos: } \begin{cases} \bar{w}_0 = \tilde{A} \bar{v}_0 \\ \rho_0 = \bar{v}_0^T \bar{w}_0 \end{cases} \\ \text{Iteramos para } k=0, 1, \dots \text{ hasta convergencia:} \\ \begin{cases} \bar{v}_{k+1} = \bar{w}_k / |\bar{w}_k| \\ \bar{w}_{k+1} = \tilde{A} \bar{v}_{k+1} \\ \rho_{k+1} = \bar{v}_{k+1}^T \bar{w}_{k+1} \end{cases} \end{array} \right.$$

Solus el caso en que  $\bar{v}_0$  no tenga componente en  $\bar{a}_n$ , 20/34

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}_k = \bar{a}_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \mu_n$$

donde  $\tilde{A} \bar{a}_n = \mu_n \bar{a}_n$  y  $\mu_n$  es el mayor de los autovalores de  $\tilde{A}$ . (\*)

b) La implementación del algoritmo anterior en un programa Fortran es directa.

No es necesario almacenar la matriz  $\tilde{A} = m \tilde{K}^{-1}$  ya dispones de su expresión explícita.

$$\tilde{A} = m \tilde{K}^{-1} = \frac{m}{K} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}, \quad K = \frac{12EI}{h^3} \cdot N_c$$

La única parte del algoritmo que no es evidente es la realización de los productos  $\bar{w} = \tilde{A} \bar{v}$ :

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \rightarrow \bar{w} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} w_i = \frac{m}{K} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} j v_j + i \sum_{j=i}^n v_j \right] \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Nota:

Este tipo de problemas no se resuelve aún normalmente.

$$\bar{w} = (m \tilde{K}^{-1}) \bar{v} \Leftrightarrow \tilde{K} \bar{w} = m \bar{v}$$

Es más eficaz resolver el sistema  $\tilde{K} \bar{w} = m \bar{v}$  que invertir la matriz  $\tilde{K}$ .

En este caso tenemos una expresión sencilla de  $\tilde{K}^{-1}$ .

Aún así, sería más eficaz resolver  $\tilde{K} \bar{w} = m \bar{v}$ .

(\*) Se puede probar que serán todas positivas ya que  $\tilde{K}$ ,  $M$  son simétricas y definidas positivas

c) Sabemos que  $\bar{a}_n \approx \bar{v}^R = \alpha_1 \bar{\phi}_1$  con

$$\bar{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ | \\ \varphi_n \end{Bmatrix}, \quad \varphi_i = \frac{i}{n} \left( 2 - \frac{i}{n} \right)$$

Podemos incorporar esta información utilizando el método de Rayleigh-Ritz:

$$\underline{\underline{\phi}} = [\bar{\phi}_1] \rightsquigarrow \begin{cases} \hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{\phi}}_1^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\phi}}_1 \\ \hat{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{\phi}}_1^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\phi}}_1 \end{cases}$$

después:

$$\begin{cases} \hat{\underline{\underline{K}}} = K [\varphi_1 \dots \varphi_n] \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ | \\ \varphi_n \end{Bmatrix} \\ \hat{\underline{\underline{M}}} = m [\varphi_1 \dots \varphi_n] \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ | \\ \varphi_n \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\underline{\underline{K}}} = K \left( \sum_{i=1}^n 2\varphi_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i \varphi_{i+1} \right) \\ \hat{\underline{\underline{M}}} = m \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \end{cases}$$

Se comprueba que

$$\begin{cases} \hat{\underline{\underline{K}}} = 2K \left( \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(2 - \frac{i}{n}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right) \left(2 - \frac{i}{n}\right) \right) \\ \hat{\underline{\underline{M}}} = m \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(2 - \frac{i}{n}\right)^2 \end{cases}$$

Por tanto,  $\hat{\underline{\underline{K}}} \bar{\alpha} = \hat{\rho} \hat{\underline{\underline{M}}} \bar{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\rho} = \frac{\hat{\underline{\underline{K}}}}{\hat{\underline{\underline{M}}}}, \quad \bar{\alpha} = \{\alpha_1\}, \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\hat{\underline{\underline{M}}}}} \\ \bar{a}_n \approx \alpha_1 \bar{\phi}_1 \end{cases}$

22/34

d) En la hoja Excel está resuelto el problema con las datos siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_c = 25 \quad (5 \times 5 \text{ pilas por planta}) \\ E = 2,943 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \quad (\text{módulo de elasticidad del hormigón}) \\ I = 2,133 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad (\text{momento de inercia de la sección de un pilar: cuadrado de } 0,4 \text{ m de lado}) \\ h = 3,5 \text{ m} \quad (\text{distancia entre planos medios de trujados de } 0,3 \text{ m de espesor separados } 3,2 \text{ m}) \\ m = 3 \cdot 10^5 \text{ kg} \quad (\text{masa de cada trujado}) \end{array} \right.$$

Se observa que la frecuencia fundamental es

$$f = \omega / 2\pi = 1,468222 \text{ Hz} \quad (*)$$

El método de Rayleigh-Ritz proporciona la aproximación

$$f^R = \omega^R / 2\pi = 1,487412 \text{ Hz} \quad (\text{error} \approx 1,31\%)$$

La aproximación es muy buena porque el vector de Ritz se parece mucho al autovector asociado a la frecuencia fundamental.

---

(\*) Con el programa Fortran se obtiene el mismo resultado. Nótese que el método converge en unas 13-14 iteraciones al resultado correcto con errores del orden de  $10^{-12}$ . Obsérvese que converge más rápidamente al autovalor que al autovector.

$$a) \begin{cases} v'' = -\frac{P}{EI} v & ; x \in (0, L) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$

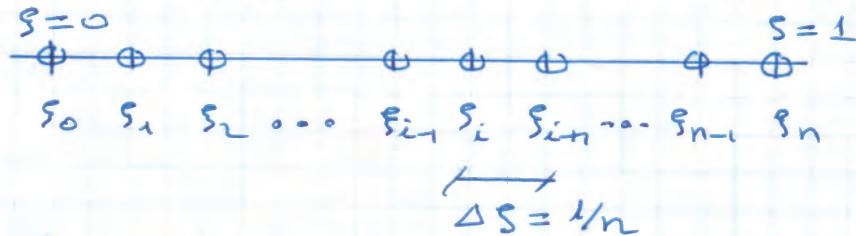
Adimensionalizamos:  $x = \xi \cdot L \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dv}{d\xi} \\ \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{1}{L^2} \frac{d^2v}{d\xi^2} \end{cases}$

Problema adimensional:

$$\begin{cases} \frac{d^2v}{d\xi^2} = -\lambda^2 v & ; \xi \in (0, 1) \\ \xi = 0 \Rightarrow v = 0 \\ \xi = 1 \Rightarrow v = 0 \end{cases}$$

$$\text{con } \lambda^2 = \frac{PL^2}{EI} \Leftrightarrow P = \lambda^2 \frac{EI}{L^2}$$

b) Discretizamos el intervalo  $[0, 1]$  en la forma



y planteamos:

$$\left[ \frac{d^2v}{d\xi^2} + \lambda^2 v \right] \Big|_{\xi = \xi_i} = 0 \quad ; i = 1, \dots, n-1$$

Utilizamos la aproximación en diferencias:

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} \Big|_{\xi = \xi_i} = \frac{v(\xi_{i-1}) - 2v(\xi_i) + v(\xi_{i+1}))}{(\Delta \xi)^2} + \mathcal{O}(\Delta \xi^2)$$

$$\text{después: } \frac{v(\xi_{i-1}) - 2v(\xi_i) + v(\xi_{i+1}))}{\Delta \xi^2} + \lambda^2 v(\xi_i) + \mathcal{O}(\Delta \xi^2) = 0$$

Despreciando  $\mathcal{O}(\Delta \xi^2)$  y aproximando  $v(\xi_i) \approx \hat{v}_i$ ,





d) Resolvamos analíticamente los casos  $n=2,3,4$ .

25/34

$n=2$

$$[2] \{ \hat{u}_1 \} = \mu \{ \hat{u}_1 \} \rightarrow \mu = 2 \Rightarrow \boxed{P = \frac{8EI}{L^2}}$$

$n=3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} (2-\mu) & -1 \\ -1 & (2-\mu) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\mu)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = 2 \mp 1 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$$\mu = 1 \Rightarrow \boxed{P = \frac{9EI}{L^2}}$$

$n=4$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} (2-\mu) & -1 & 0 \\ -1 & (2-\mu) & -1 \\ 0 & -1 & (2-\mu) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\mu)^3 - 2(2-\mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \begin{cases} 2 \\ 2 \mp \sqrt{2} \end{cases} \begin{cases} 2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

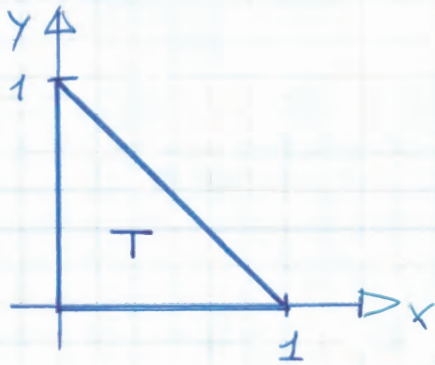
$$\mu = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P = \frac{16(2-\sqrt{2})EI}{L^2}}$$

Valor exacto:  $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 9,869604401 \frac{EI}{L^2}$

después:  $n=2 \rightarrow P = 8,000000000 \frac{EI}{L^2} \rightarrow r \approx 18,94\%$

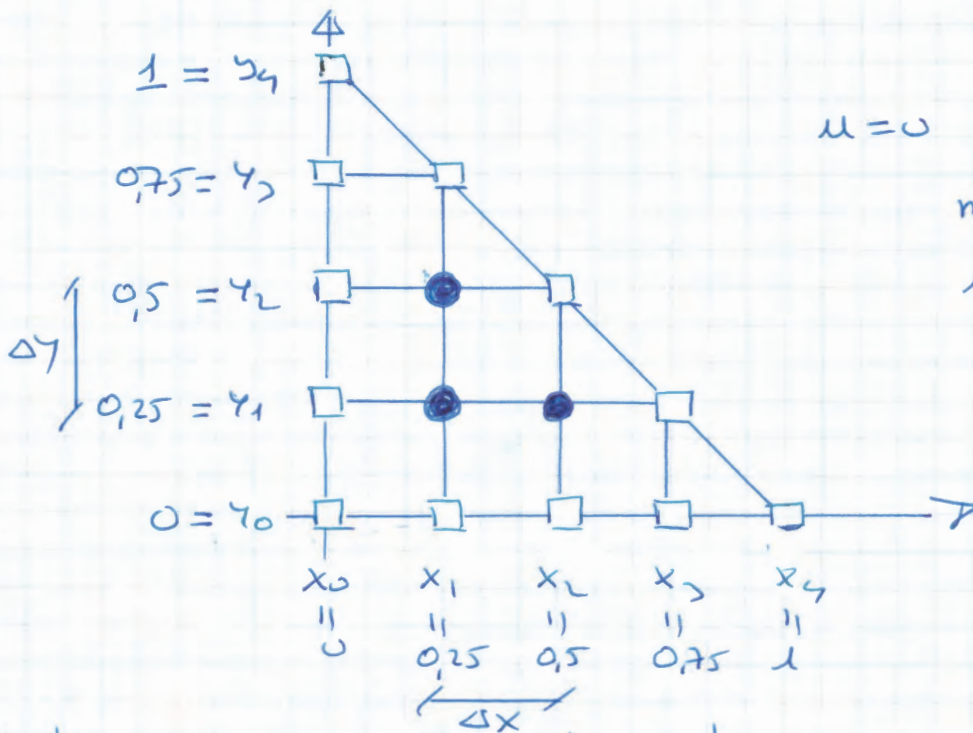
$n=3 \rightarrow P = 9,000000000 \frac{EI}{L^2} \rightarrow r \approx 8,81\%$

$n=4 \rightarrow P = 9,372583002 \frac{EI}{L^2} \rightarrow r \approx 5,04\%$



$$\begin{aligned} \mu_{xx} + \mu_{yy} + \lambda \mu &= 0, & (x,y) \in \overset{\circ}{T} \\ \mu &= 0, & (x,y) \in \partial T \end{aligned}$$

a) Discretizamos el dominio en la forma:



$\mu = 0$  en los nodos marcados con un cuadrado

$$\Delta x = \Delta y = 1/4$$

Planteamos la ecuación diferencial en  $(x_1, y_2), (x_1, y_1), (x_2, y_1)$ :

$$\left[ \mu_{xx} + \mu_{yy} + \lambda \mu \right] \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_{xx} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} &= \frac{\mu(x_{i-1}, y_j) - 2\mu(x_i, y_j) + \mu(x_{i+1}, y_j)}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_{yy} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} &= \frac{\mu(x_i, y_{j-1}) - 2\mu(x_i, y_j) + \mu(x_i, y_{j+1})}{(\Delta y)^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2) \end{aligned} \right.$$

desgo:

$$\frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j))}{\Delta x^2} + \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{\Delta y^2} + \lambda u(x_i, y_j) + \Theta(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 0$$

Despreciamos  $\Theta(\Delta x^2 + \Delta y^2)$  y aproximamos  $u(x_i, y_j) \approx \hat{u}_{ij}$

$$\frac{\hat{u}_{i-1, j} - 2\hat{u}_{i, j} + \hat{u}_{i+1, j}}{(1/16)} +$$

$$\frac{\hat{u}_{i, j-1} - 2\hat{u}_{i, j} + \hat{u}_{i, j+1}}{(1/16)} +$$

$$\lambda \hat{u}_{ij} = 0$$

$$\text{Para } i=1, j=2 \Rightarrow \frac{-2\hat{u}_{12}}{(1/16)} + \frac{\hat{u}_{11} - 2\hat{u}_{12} + \hat{u}_{22}}{(1/16)} + \lambda \hat{u}_{12} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i=1, j=1 \Rightarrow \frac{-2\hat{u}_{11} + \hat{u}_{21}}{(1/16)} + \frac{-2\hat{u}_{11} + \hat{u}_{12}}{(1/16)} + \lambda \hat{u}_{11} = 0 \\ i=2, j=1 \Rightarrow \frac{\hat{u}_{11} - 2\hat{u}_{21}}{(1/16)} + \frac{-2\hat{u}_{21} + \hat{u}_{22}}{(1/16)} + \lambda \hat{u}_{21} = 0 \end{array} \right.$$

Es forme matricial,

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{21} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\text{con } \mu = \lambda/16$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} (4-\mu) & -1 & 0 \\ -1 & (4-\mu) & -1 \\ 0 & -1 & (4-\mu) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\mu)^3 - 2(4-\mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\mu) \left( (4-\mu)^2 - 2 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 4 \\ 4-\mu = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

después:

$$\mu = \begin{cases} 4 - \sqrt{2} \Rightarrow \lambda = 41,37258300 \\ 4 \Rightarrow \lambda = 64 \\ 4 + \sqrt{2} \Rightarrow \lambda = 86,62741700 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_{\min} = 41,37258300}$$

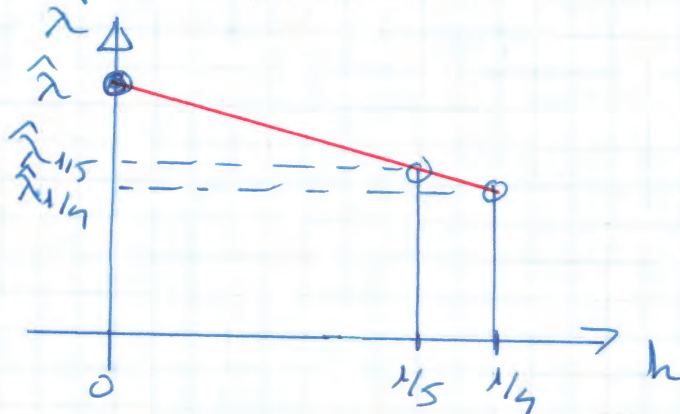
$$\lambda_{\min}^{\text{exacto}} = 5\pi^2 = 49,34802201$$

$$\Rightarrow r = \frac{\lambda_{\min}^{\text{exacto}} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\min}^{\text{exacto}}} \approx 16,16\%$$

b) Se sabe que:

$$\begin{cases} h = \Delta x = \Delta t = 1/4 \leadsto \lambda_{1/4} \approx 41,37 & (r \approx 16,16\%) \\ h = \Delta x = \Delta t = 1/5 \leadsto \lambda_{1/5} \approx 41,07 & (r \approx 10,70\%) \end{cases}$$

Extrapolación lineal:



$$\frac{\lambda - \lambda_{1/4}}{0 - 1/4} = \frac{\lambda_{1/5} - \lambda_{1/4}}{1/5 - 1/4}$$

$$\Downarrow \\ \lambda = \lambda_{1/4} - \frac{1}{4} \frac{\lambda_{1/5} - \lambda_{1/4}}{1/5 - 1/4}$$

$$\text{después } \lambda = \lambda_{1/4} \left( 1 + \frac{1/4}{1/5 - 1/4} \right) + \lambda_{1/5} \left( \frac{-1/4}{1/5 - 1/4} \right) = -4\lambda_{1/4} + 5\lambda_{1/5}$$

$$\lambda \approx 59,87 \quad (r \approx 11,19\%) \leftarrow \text{Mejor aproximación}$$

### c) Extrapolación de Richardson

29/34

Ecuación exacta:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x_1, y_2) \\ u(x_1, y_1) \\ u(x_2, y_1) \end{Bmatrix} = \left( \frac{\lambda_{\text{exacto}}}{16} \right) \begin{Bmatrix} u(x_1, y_2) \\ u(x_1, y_1) \\ u(x_2, y_1) \end{Bmatrix} + \mathcal{O}(h^2)$$

Ecuación aproximada:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{21} \end{Bmatrix} = \left( \frac{\lambda}{16} \right) \begin{Bmatrix} \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{21} \end{Bmatrix}$$

Suprema  $\lambda = \lambda_{\text{exacto}} + \mathcal{O}(h^2)$

$$\text{ luego } \begin{cases} \lambda_{\text{exacto}} = \lambda_{1/4} + E_{1/4} & ; E_{1/4} = \kappa \cdot (1/4)^2 \\ \lambda_{\text{exacto}} = \lambda_{1/5} + E_{1/5} & ; E_{1/5} = \kappa \cdot (1/5)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/4} + \kappa (1/4)^2 = \lambda_{1/5} + \kappa (1/5)^2$$

$$\kappa = \frac{\lambda_{1/5} - \lambda_{1/4}}{(1/4)^2 - (1/5)^2}$$

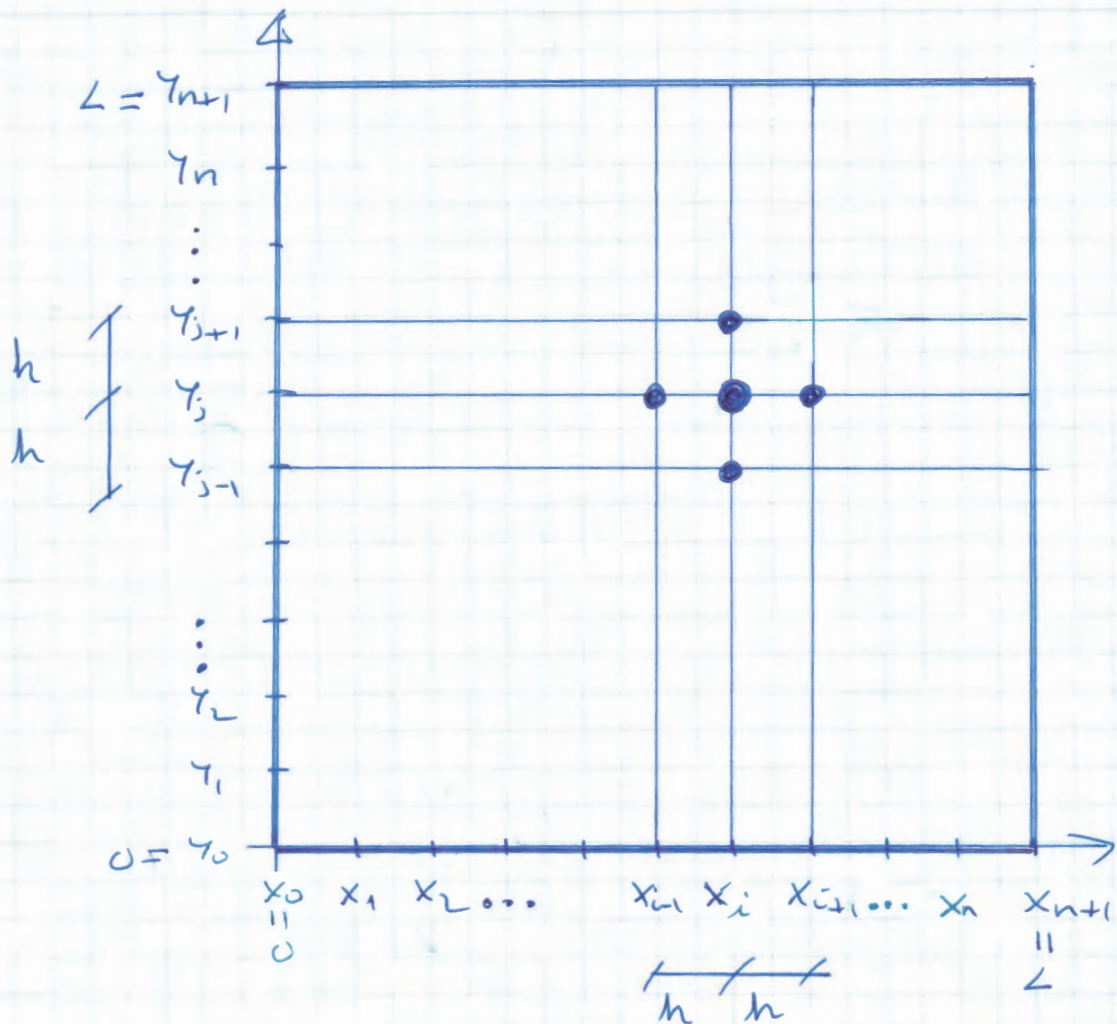
$$\lambda_{\text{exacto}} = \lambda_{1/4} + \frac{\lambda_{1/5} - \lambda_{1/4}}{(1/4)^2 - (1/5)^2} \cdot (1/4)^2$$

$$= \lambda_{1/4} \left( 1 - \frac{(1/4)^2}{(1/4)^2 - (1/5)^2} \right) + \lambda_{1/5} \frac{(1/4)^2}{(1/4)^2 - (1/5)^2}$$

$$= \lambda_{1/4} \frac{(-1/5)^2}{(1/4)^2 - (1/5)^2} + \lambda_{1/5} \frac{(1/4)^2}{(1/4)^2 - (1/5)^2} = -\frac{16}{9} \lambda_{1/4} + \frac{25}{9} \lambda_{1/5}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{exacto}} \approx 48,87 \quad (r \approx 0,979) \leftarrow \text{Buena aproximación}$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 & ; 0 < x < L ; 0 < y < L \\ u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = u(x, L) = 0 \end{cases}$$



$$h = \frac{L}{n+1} ; \hat{u}_{ij} \approx u(x_i, y_j)$$

a) Lo lógico es utilizar aproximaciones de 2<sup>o</sup> orden para  $u_{xx}$  y  $u_{yy}$ .

$$\begin{cases} u_{xx} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ u_{yy} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{cases}$$

## Deducción

31/34

$$u(x_{i+1}, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{h}{1!} u_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} u_{xxxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$u(x_{i-1}, y_j) = u(x_i, y_j) - \frac{h}{1!} u_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^3}{3!} u_{xxx}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{4!} u_{xxxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^5)$$

---

$$u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j) = 2u(x_i, y_j) + 2\frac{h^2}{2!} u_{xx}(x_i, y_j) + 2\frac{h^4}{4!} u_{xxxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^5)$$

$$\Rightarrow u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^3)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{O}(h^2)}$

De forma similar se deduce la aproximación para  $u_{yy}(x_i, y_j)$ .

b) Planteamos  $\left[ u_{xx} + u_{yy} + \lambda u \right] \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = 0 ; \left. \begin{array}{l} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1}))}{h^2} + \lambda u(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2) = 0$$

Despreciando los errores  $\mathcal{O}(h^2)$  y aproximando  $\hat{u}_{i,j} = u(x_i, t_j)$

$$\frac{\hat{u}_{i-1,j} - 2\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{i+1,j}}{h^2} + \frac{\hat{u}_{i,j-1} - 2\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{i,j+1}}{h^2} + \lambda \hat{u}_{i,j} = 0$$

$$\begin{cases} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que  $\hat{u}_{0,j} = \hat{u}_{n,j} = \hat{u}_{i,0} = \hat{u}_{i,n} = 0$  y ordenando adecuadamente las magnitudes  $\hat{u}_{i,j}$  se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \tilde{T} & & & & & \\ & -\tilde{I} & & & & \\ & & \tilde{T} & & & \\ & & & -\tilde{I} & & \\ & & & & \tilde{T} & \\ & & & & & -\tilde{I} \\ & & & & & & \tilde{T} \\ & & & & & & & -\tilde{I} \\ & & & & & & & & \tilde{T} \\ & & & & & & & & & -\tilde{I} \\ & & & & & & & & & & \tilde{T} \\ & & & & & & & & & & & -\tilde{I} \\ & & & & & & & & & & & & \tilde{T} \\ & & & & & & & & & & & & & -\tilde{I} \\ & & & & & & & & & & & & & & \tilde{T} \\ & & & & & & & & & & & & & & & -\tilde{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \vdots \\ \hat{u}_{n-1} \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \vdots \\ \hat{u}_{n-1} \\ \hat{u}_n \end{pmatrix}$$

donde 
$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 4 & -1 \\ -1 & & & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_i = \begin{Bmatrix} \hat{u}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{in} \end{Bmatrix}; \quad \mu = h^2 \cdot \lambda = \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 \lambda$$

$\tilde{T}$  e  $\tilde{I}$  son submatrices  $n \times n$ .  
de matriz es tridigonal por bloques simétrica de orden  $n^2 \times n^2$   
con semiancho de banda  $n$ .



Si se almacena como matriz simétrica en banda se requiere  $n^2 \cdot (1+n)$  posiciones de memoria. (\*)

c) Puesto que buscamos el mínimo autovalor  $\lambda$ , se puede (y se debe) utilizar el método de MINES INVERSO.

Para implementarlo es preciso factorizar la matriz, ya que hay que resolver sistemas de ecuaciones. Lo lógico es utilizar la factorización de Cholesky (por bloques).

d) Para  $n=1$

$$[4] \begin{Bmatrix} \hat{u}_{11} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} \hat{u}_{11} \end{Bmatrix}$$

$$\text{luego } \left. \begin{array}{l} \mu = 4 \\ h = \frac{4}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{16}{2^2}$$

Para  $n=2$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{21} \\ \hat{u}_{22} \end{Bmatrix} = \mu \begin{Bmatrix} \hat{u}_{11} \\ \hat{u}_{12} \\ \hat{u}_{21} \\ \hat{u}_{22} \end{Bmatrix}$$

$$\text{luego } \det \begin{bmatrix} (4-\mu) & -1 & -1 & 0 \\ -1 & (4-\mu) & 0 & -1 \\ -1 & 0 & (4-\mu) & -1 \\ 0 & -1 & -1 & (4-\mu) \end{bmatrix} = 0$$

(\*) Para este tipo de problemas se desarrollan métodos específicos para matrices por bloques.

Se comprueba que  $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 2 \\ h = \frac{4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{18}{4^2}$

proporciona el menor autovalor en valor absoluto (\*)

Observamos que  $\lambda^{\text{exacto}} = \frac{2 + \pi^2}{4^2} = \frac{19.7392088}{4^2}$ ,

luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} n=1 \rightarrow h_1 = 4/2 \rightarrow \lambda_1 = \frac{16}{4^2} \quad (r \sim 18,99\%) \\ n=2 \rightarrow h_2 = 4/3 \rightarrow \lambda_2 = \frac{18}{4^2} \quad (r \sim 8,81\%) \end{array} \right.$$

e) Extrapolación de Richardson

Hiptesis:  $\lambda^{\text{exacto}} = \lambda^{\text{aproximado}} + \theta(h^2)$

$$\text{luego: } \left\{ \begin{array}{l} n=1 \rightarrow h_1 = 4/2 \rightarrow \lambda^{\text{exacto}} \approx \lambda_1 + \kappa h_1^2 \\ n=2 \rightarrow h_2 = 4/3 \rightarrow \lambda^{\text{exacto}} \approx \lambda_2 + \kappa h_2^2 \end{array} \right.$$

$$\lambda_1 + \kappa (4/2)^2 \approx \lambda_2 + \kappa (4/3)^2 \Rightarrow$$

$$\kappa \approx \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(4/3)^2 - (4/2)^2} \Rightarrow \lambda^{\text{exacto}} \approx \lambda_1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(4/3)^2 - (4/2)^2} (4/2)^2 \Rightarrow$$

$$\lambda^{\text{exacto}} \approx \lambda_1 \left( 1 - \frac{(4/2)^2}{(4/2)^2 - (4/3)^2} \right) + \lambda_2 \left( \frac{(4/2)^2}{(4/2)^2 - (4/3)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\lambda^{\text{exacto}} \approx -\frac{4}{5} \lambda_1 + \frac{9}{5} \lambda_2 = \frac{19,6}{4^2}$$

luego:  $\lambda^{\text{exacto}} \approx \frac{19,6}{4^2} \quad (r \sim 0,71\%) \leftarrow$  Muy buena aprox.

(\*) las soluciones de la ecuación característica son  $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 2 \\ \mu = 4 \text{ (doble)} \\ \mu = 6 \end{array} \right.$