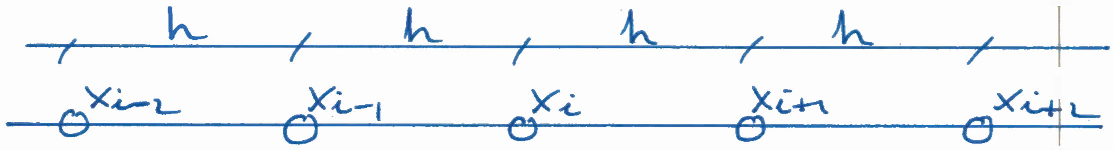
CN - 2023/2024 PR4 - 01

Planteamos un esquema simétrico:



$$u(x_{i\pm1}) = u(x_i) \pm h\,u'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) \pm \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u''''(x_i) +$$
$$\pm \frac{h^5}{120}u^{V}(x_i) + \frac{h^6}{720}u^{VI}(x_i) + \frac{h^7}{5040}u^{VII}(x_i) + \Theta(h^8)$$

$$u(x_{i\pm2}) = u(x_i) \pm 2h\,u'(x_i) + \frac{4h^2}{2}u''(x_i) \pm \frac{8h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{16}{24}h^4u''''(x_i) +$$
$$\pm \frac{32}{120}h^5u^{V}(x_i) + \frac{64}{720}h^6u^{VI}(x_i) + \frac{128h^7}{5040}u^{VII}(x_i) + \Theta(h^8)$$

Disponemos estos valores en formato matricial

$$\begin{pmatrix} u(x_{i+1}) \\ u(x_{i-1}) \\ u(x_{i+2}) \\ u(x_{i-2}) \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 64 & -128 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} u(x_i) \\ h\,u'(x_i) \\ h^2/_2\, u''(x_i) \\ h^3/_6\, u'''(x_i) \\ h^4/_{24}\, u''''(x_i) \\ h^5/_{120}\, u^{V}(x_i) \\ h^6/_{720}\, u^{VI}(x_i) \\ h^7/_{5040}\, u^{VII}(x_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta(h^8) \\ \Theta(h^8) \\ \Theta(h^8) \\ \Theta(h^8) \end{pmatrix}$$

Pretendemos obtener una combinación lineal del tipo

$$\alpha_1 u(x_{i+1}) + \alpha_{-1}u(x_{i-1}) + \alpha_2 u(x_{i+2}) + \alpha_{-2}u(x_{i-2})$$

que nos permita despejar $u''(x_i)$ con errores de 4º orden.
planteamos que se anulen las columnas marcadas en rojo y que el término en $(h^2/_2\, u''(x_i))$ valga 1. (*)

(*) Ver explicación al final

Luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & -8 \\ 1 & 1 & 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{-1} \\ \alpha_2 \\ \alpha_{-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si adoptamos un esquema simétrico,

$$\alpha_1 = \alpha_{-1}, \qquad \alpha_2 = \alpha_{-2},$$

automáticamente se satisfarán las ecuaciones 1ª y 3ª.

Además, se anularán los términos de $u^{V}(x_i)$, $u^{VII}(x_i)$, etc.

Luego basta con imponer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuya solución (trivial) es $\alpha_1 = 16/24$, $\alpha_2 = -1/24$.

Utilizando estos valores obtenemos:

$$\frac{1}{24}\left(16\,u(x_{i+1}) + 16\,u(x_{i-1}) - u(x_{i+2}) - u(x_{i-2})\right) =$$

$$= \frac{1}{24}(16+16-1-1)\,u(x_i)$$

$$+ 1 \cdot \frac{h^2}{2} u''(x_i)$$

$$+ \frac{1}{24}(16+16-64-64)\frac{h^6}{720} u^{VI}(x_i)$$

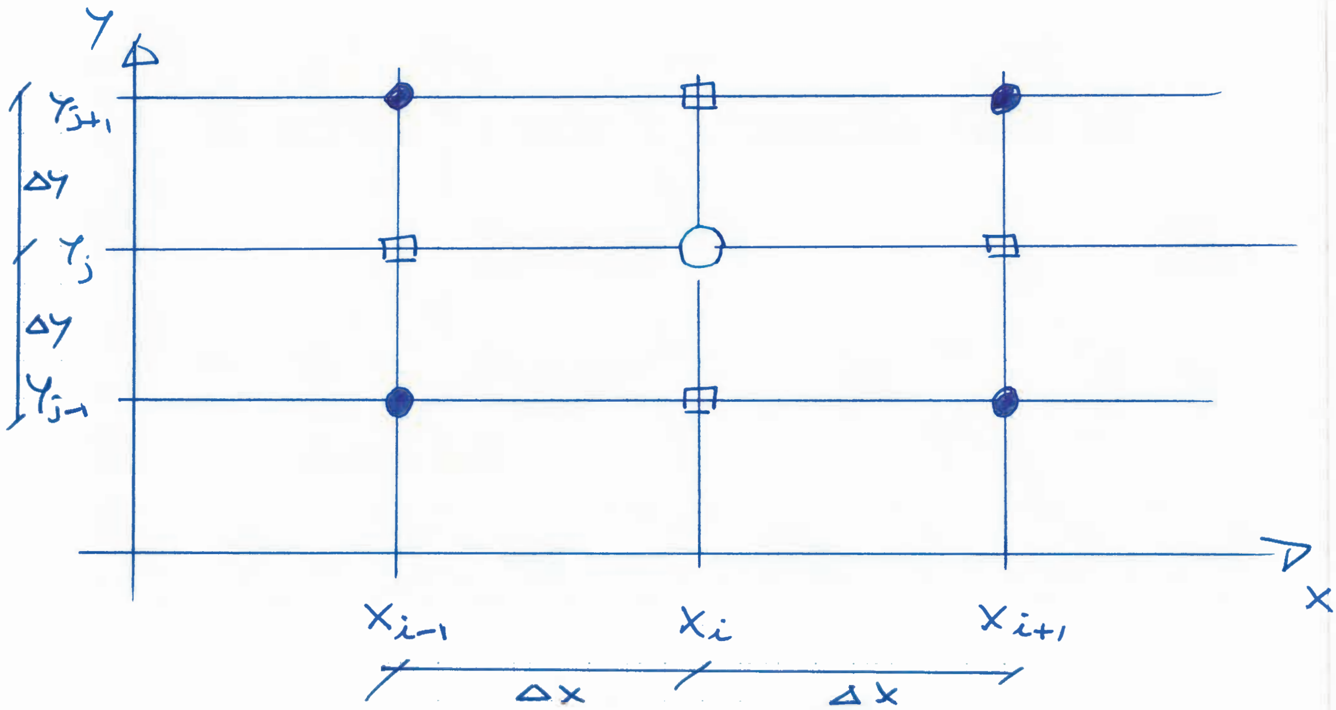
$$+ O(h^8)$$

Los restantes términos (en $u'(x_i)$, $u'''(x_i)$, $u^{IV}(x_i)$, $u^{V}(x_i)$, $u^{VII}(x_i)$) son nulos.

Despejando:

$$\boxed{u''(x_i) = \frac{-u(x_{i-2})+16u(x_{i-1})-30u(x_i)+16u(x_{i+1})-u(x_{i+2})}{12h^2} + \underbrace{\frac{h^4}{90}u''''(x_i) + \Theta(h^6)}_{\Theta(h^4)}}$$

Nota: Para obtener una aproximación de 4º orden de $u''(x_i)$, en principio necesitaríamos 5 puntos más. Así podríamos plantear una combinación lineal de los valores de estos 5 puntos de forma que se anulasen los términos de $u'(x_i)$, $u'''(x_i)$, $u^{IV}(x_i)$ y $u^{V}(x_i)$.
Es preciso que se anule el término en $u'(x_i)$ para que al despejar $u''(x_i)$ la fórmula sea convergente, y es preciso que se anulen las otras tres derivadas para que el error sea $\Theta(h^6)/h^2 = \Theta(h^4)$.
Sin embargo, hemos comprobado que al elegir los puntos de forma simétrica bastan 4 puntos más, ya que el término $u^{V}(x_i)$ se anula automáticamente cuando los coeficientes son simétricos.
En general los esquemas simétricos son más eficientes.



$$u(x+h, y+k) = u(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^i u(x,y) + \Theta\left((h+k)^{n+1}\right)$$

$$= u + (h u_x + k u_y) + \frac{1}{2}\left(h^2 u_{xx} + 2hk u_{xy} + k^2 u_{yy}\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(h^3 u_{xxx} + 3h^2 k u_{xxy} + 3hk^2 u_{xyy} + k^3 u_{yyy}\right)$$

$$+ \frac{1}{24}\left(h^4 u_{xxxx} + 4h^3 k u_{xxxy} + 6h^2k^2 u_{xxyy} + 4hk^3 u_{xyyy} + k^4 u_{yyyy}\right)$$

$$+ \Theta\left((h+k)^5\right)$$

Pretendemos discretizar la derivada cruzada $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$ en $x = x_i$, $y = y_j$.

En los puntos marcados con un cuadrado, $h=0$ o $k=0$, por lo que el término $(2hk u_{xy})$ se anulará. Así que estos puntos no aportarán ninguna información que contribuya a calcular esta derivada.

En consecuencia, plantearemos la obtención de $u_{xy}(x_i, y_j)$ a partir de los valores de $u(x,y)$ en los puntos marcados con un círculo

Sea $u_{ij} = u(x_i, y_j)$

Planteando la serie de Taylor, obtenemos:

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1,j+1} \\ u_{i+1,j-1} \\ u_{i-1,j+1} \\ u_{i-1,j-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \Delta x\, u_x \\ \Delta y\, u_y \\ \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx} \\ \Delta x \Delta y\, u_{xy} \\ \frac{1}{2}\Delta y^2 u_{yy} \\ \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx} \\ \frac{1}{2}\Delta x^2 \Delta y\, u_{xxy} \\ \frac{1}{2}\Delta x \Delta y^2 u_{xyy} \\ \frac{1}{6}\Delta y^3 u_{yyy} \\ \frac{1}{24}\Delta x^4 u_{xxxx} \\ \frac{1}{6}\Delta x^3 \Delta y\, u_{xxxy} \\ \frac{1}{4}\Delta x^2 \Delta y^2 u_{xxyy} \\ \frac{1}{6}\Delta x \Delta y^3 u_{xyyy} \\ \frac{1}{24}\Delta y^4 u_{yyyy} \end{Bmatrix} + O((\Delta x + \Delta y)^5) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$0 \quad 0 \quad 0$

Buscamos una combinación lineal tipo $\alpha_1 u_{i+1,j+1} + \alpha_2 u_{i+1,j-1} + \alpha_3 u_{i-1,j+1} + \alpha_4 u_{i-1,j-1}$ que anule los términos que multiplican a u_x, u_y, u_{xx} y u_{yy}.

~~Al~~ anularse el término de u_{xx} se anulará automáticamente el de u_{yy}, pues sus coeficientes son iguales. Por tanto, planteamos otra condición: que el término de $(\Delta x \Delta y\, u_{xy})$ valga 1.

0,25

Luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \to \text{términos de } \Delta x\, u_x \\ \to \quad '' \quad '' \quad \Delta y\, u_y \\ \to \quad '' \quad '' \quad \left\{ \begin{array}{l} 1/2\, \Delta x^2 u_{xx} \\ 1/2\, \Delta y^2 u_{yy} \end{array} \right. \\ \to \quad '' \quad '' \quad \Delta x \Delta y\, u_{xy} \end{array}$$

de solución es

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 = -1/4 \\ \alpha_3 = -1/4 \\ \alpha_4 = 1/4 \end{cases}$$

Además, se anulan (casualmente) los términos de u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}, u_{xxxx}, u_{xxyy}, u_{yyyy}.

Luego:

$$1/4 \left(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} \right) =$$

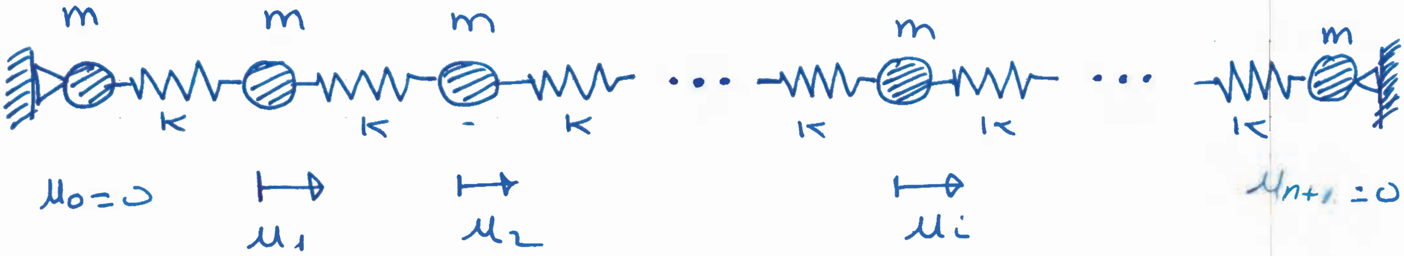
$$= \Delta x \Delta y\, u_{xy} + \frac{1}{6} \Delta x^3 \Delta y\, u_{xxxy} + \frac{1}{6} \Delta x \Delta y^3 u_{xyyy} + \mathcal{O}\left((\Delta x + \Delta y)^5 \right)$$

Despejando u_{xy}:

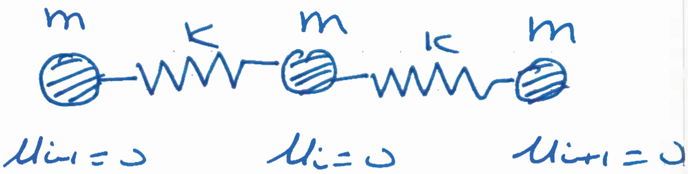
$$\boxed{\begin{aligned} u_{xy}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta y} \\ &\quad - \frac{1}{6} \left(\Delta x^2 u_{xxxy}(x_i, y_j) + \Delta y^2 u_{xyyy}(x_i, y_j) \right) + \\ &\quad + \text{errores de orden superior} \end{aligned}}$$

$\Leftarrow \mathcal{O}(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

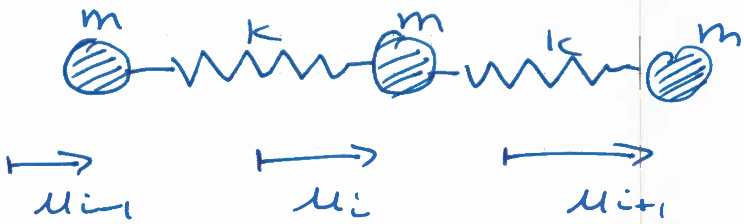
(2º orden)



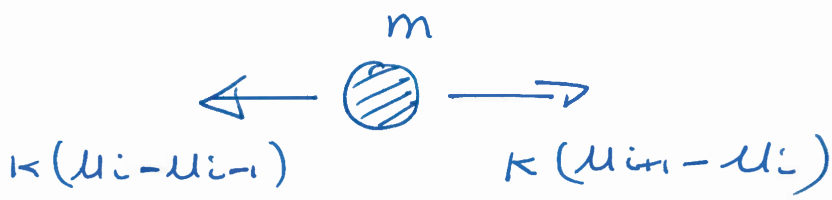
Situación de equilibrio



En movimiento



Ecuación del movimiento de la masa i-ésima:



Luego:

$$m\ddot{u}_i = k(u_{i+1}-u_i) - k(u_i - u_{i-1})$$
$$= k(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$$

Definiendo: $c^2 = k/m$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\ddot{u}_i = c^2(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \;;\; i = 1, \dots, n} \\ u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} u_i(0) = u_{i0} \\ \dot{u}_i(0) = v_{i0} \end{array}\right\} \; i = 1, \dots, n \end{array}\right.$$

a) Definimos

$$\bar{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \\ \hline y_{n+1} \\ | \\ y_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ | \\ u_n \\ \hline \dot{u}_1 \\ | \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ | \\ \dot{u}_n \\ \hline \ddot{u}_1 \\ | \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} \\ \hline \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{0} \end{array}\right]}_{\underset{\sim}{M}} \bar{y} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{B} = c^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Plantearemos un Runge-Kutta de 4º orden (*)

Ej: Método de Kutta de 4º orden

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \Delta\tau \left(\tfrac{1}{6} \bar{k}_0 + \tfrac{1}{3} \bar{k}_1 + \tfrac{1}{3} \bar{k}_2 + \tfrac{1}{6} \bar{k}_3 \right)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = \bar{\varphi}(\tau, \bar{y}) = \underset{\sim}{M}\, \bar{y}, \text{ luego}$$

$$\begin{cases} \bar{k}_0 = \bar{\varphi}(\tau_i, \bar{y}_i) = \underset{\sim}{M}\, \bar{y}_i \\ \bar{k}_1 = \bar{\varphi}(\tau_i + \tfrac{1}{2}\Delta\tau, \bar{y}_i + \tfrac{1}{2}\bar{k}_0 \Delta\tau) = \underset{\sim}{M} (\bar{y}_i + \tfrac{1}{2} \bar{k}_0 \Delta\tau) \\ \bar{k}_2 = \bar{\varphi}(\tau_i + \tfrac{1}{2}\Delta\tau, \bar{y}_i + \tfrac{1}{2}\bar{k}_1 \Delta\tau) = \underset{\sim}{M} (\bar{y}_i + \tfrac{1}{2} \bar{k}_1 \Delta\tau) \\ \bar{k}_3 = \bar{\varphi}(\tau_i + \Delta\tau, \bar{y}_i + \bar{k}_2 \Delta\tau) = \underset{\sim}{M} (\bar{y}_i + \bar{k}_2 \Delta\tau) \end{cases}$$

luego:

$$\begin{cases} \bar{k}_0 = \underset{\sim}{M}\, \bar{y}_i \\ \bar{k}_1 = \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau)\, \bar{y}_i \\ \bar{k}_2 = \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau) \Delta\tau)\, \bar{y}_i \\ \bar{k}_3 = \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} (\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau) \Delta\tau) \Delta\tau)\, \bar{y}_i \end{cases}$$

(*) En la práctica se utilizan métodos más estables que para estos problemas permiten trabajar con un $\Delta\tau$ más grande

$$\Rightarrow \bar{y}_{i+1} = \Big[\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{6} \underset{\sim}{M} \Delta\tau + \tfrac{1}{3} \underset{\sim}{M} \Delta\tau \left(\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{3} \underset{\sim}{M} \Delta\tau \left(\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau \left(\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau\right)\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{6} \underset{\sim}{M} \Delta\tau \left(\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{M} \Delta\tau \left(\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau \left(\underset{\sim}{I} + \tfrac{1}{2} \underset{\sim}{M} \Delta\tau\right)\right)\right) \Big] \bar{y}_i$$

$$= \left[\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{M} \Delta\tau + \tfrac{1}{2} (\underset{\sim}{M} \Delta\tau)^2 + \tfrac{1}{6} (\underset{\sim}{M} \Delta\tau)^3 + \tfrac{1}{24} (\underset{\sim}{M} \Delta\tau)^4 \right] \bar{y}_i$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = \underset{\sim}{K}\, \bar{y}_i, \quad \text{con } \underset{\sim}{K} = \left[\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{M} \Delta\tau + \tfrac{1}{2} (\underset{\sim}{M} \Delta\tau)^2 + \tfrac{1}{6} (\underset{\sim}{M} \Delta\tau)^3 + \tfrac{1}{24} (\underset{\sim}{M} \Delta\tau)^4 \right] \\[1ex] \qquad \underset{\sim}{M} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} \\ \hline \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{0} \end{array}\right], \quad \underset{\sim}{B} = c^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \\[1ex] \bar{y}_0 = \begin{Bmatrix} u_{10} \\ \vdots \\ u_{n0} \\ \hline v_{10} \\ \vdots \\ v_{n0} \end{Bmatrix} \end{cases}}$$

b) $$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = u_{xx} - \Theta(h^2)$$

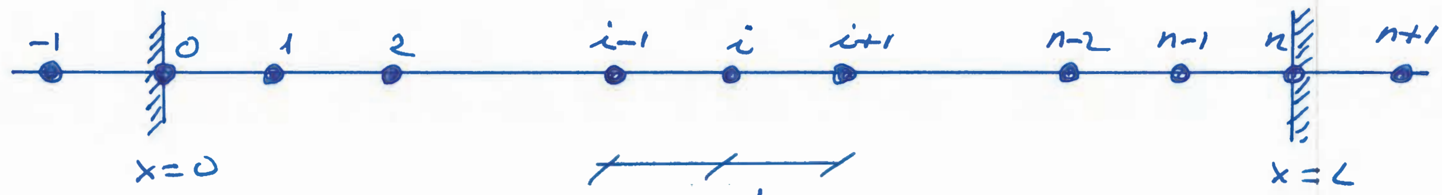
luego el sistema es una discretización de la EDP

$$u_{\tau\tau} = \underbrace{(c^2 h^2)}_{a^2} u_{xx}$$

cuya solución general es $u(\tau, x) = A f(x + a\tau) + B g(x - a\tau)$

luego $\begin{cases} a = c \cdot h = \text{velocidad de propagación de las ondas} \\ c = \dfrac{a}{h} \Rightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{h}{a} \equiv \text{tiempo que tarda el sonido en recorrer la distancia } h \end{cases}$

CN - 2023/2024 PR4 - 04



$$h = L/n$$
$$x_i = i \cdot h$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 v}{d x^4} = \dfrac{1}{EI} P, \quad x \in (0, L) \longrightarrow \left[v'''' - \dfrac{P}{EI} \right] \Big|_{x=x_i} = 0 \\ v(0) = v'(0) = 0 \\ v(L) = v'(L) = 0 \end{cases}$$

$$v''''(x_i) = \frac{v(x_{i-2}) - 4v(x_{i-1}) + 6v(x_i) - 4v(x_{i+1}) + v(x_{i+2})}{h^4} + \Theta(h^2)$$

$$\left.\begin{aligned} v'(x_0) &= \frac{-3v(x_0) + 4v(x_1) - v(x_2)}{2h} + \Theta(h^2) \\ v'(x_n) &= \frac{v(x_{n-2}) - 4v(x_{n-1}) + 3v(x_n)}{2h} + \Theta(h^2) \end{aligned}\right\} \rightarrow 2^{\circ} \text{ orden.}$$

$$\left.\begin{aligned} v'(x_0) &= \frac{-v(x_0) + v(x_1)}{h} + \Theta(h) \\ v'(x_n) &= \frac{-v(x_{n-1}) + v(x_n)}{h} + \Theta(h) \end{aligned}\right\} \rightarrow 1^{a} \text{ orden}$$

Notación: $\hat{v}_i \simeq v(x_i)$

a) <u>Esquema de 2° orden</u>

$i = 2, \ldots, n-2$

$$\begin{cases} v(x_0) = 0 \\ v'(x_0) = \dfrac{-3v(x_0) + 4v(x_1) - v(x_2)}{2h} + \Theta(h^2) = 0 \\ v''''(x_i) - \dfrac{P}{EI} = \dfrac{v(x_{i-2}) - 4v(x_{i-1}) + 6v(x_i) - 4v(x_{i+1}) + v(x_{i+2})}{h^4} + \Theta(h^2) - \dfrac{P}{EI} = 0 \\ v'(x_n) = \dfrac{v(x_{n-2}) - 4v(x_{n-1}) + 3v(x_n)}{2h} + \Theta(h^2) = 0 \\ v(x_n) = 0 \end{cases}$$

Despreciando errores locales de truncamiento:

$$\begin{cases} \hat{v}_0 = 0 \\ \dfrac{-3\hat{v}_0 + 4\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{2h} = 0 \\ \dfrac{\hat{v}_{i-2} - 4\hat{v}_{i-1} + 6\hat{v}_i - 4\hat{v}_{i+1} + \hat{v}_{i+2}}{h^4} - \dfrac{P}{EI} = 0 \ ; \ i = 2, \dots, n-2 \\ \dfrac{\hat{v}_{n-2} - 4\hat{v}_{n-1} + 3\hat{v}_n}{2h} = 0 \\ \hat{v}_n = 0 \end{cases}$$

Para $n = 4 \rightarrow h = L/4$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ PL^4/256EI \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Resolviendo: $\hat{v}_0 = 0, \ \hat{v}_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL^4}{256\,EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Luego: $\left.\begin{matrix} 4\hat{v}_1 = \hat{v}_2 \\ 4\hat{v}_3 = \hat{v}_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow -\hat{v}_2 + 6\hat{v}_2 - \hat{v}_2 = \dfrac{PL^4}{256\,EI}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{v}_2 = \frac{PL^4}{1024\,EI}} \ ; \quad \hat{v}_1 = \hat{v}_3 = \frac{PL^4}{4096\,EI}$$

04c

b) Esquema de 1ª orden

$$\begin{cases} v(x_0)=0 \\ v'(x_0)=\dfrac{-v(x_0)+v(x_1)}{h}+O(h)=0 \\ v''''(x_i)-\dfrac{P}{EI}=\dfrac{v(x_{i-2})-4v(x_{i-1})+6v(x_i)-4v(x_{i+1})+v(x_{i+2})}{h^4}+O(h^2)-\dfrac{P}{EI}=0 \\ v'(x_n)=\dfrac{-v(x_{n-1})+v(x_n)}{h}+O(h)=0 \\ v(x_n)=0 \end{cases}$$

$i=2,\dots,n-2$

Despreciando errores locales de truncamiento:

$$\begin{cases} \hat{v}_0=0 \\ \dfrac{-\hat{v}_0+\hat{v}_1}{h}=0 \\ \dfrac{\hat{v}_{i-2}-4\hat{v}_{i-1}+6\hat{v}_i-4\hat{v}_{i+1}+\hat{v}_{i+2}}{h^4}-\dfrac{P}{EI}=0\ ;\ i=2,\dots,n-2 \\ \dfrac{-\hat{v}_{n-1}+\hat{v}_n}{h}=0 \\ \hat{v}_n=0 \end{cases}$$

Para $n=4 \rightarrow h=L/4$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ PL^4/256EI \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Resolviendo: $\hat{v}_0=0 \rightarrow \hat{v}_1=0$, $\hat{v}_4=0 \rightarrow \hat{v}_3=0$

$$6\hat{v}_2=\frac{PL^4}{256\,EI} \Rightarrow \boxed{\hat{v}_2=\frac{PL^4}{1536\,EI}}$$

c) $$v(L/2) = \frac{PL^4}{384\,EI}$$

$$\begin{cases} 2^{\circ}\text{ orden} \rightarrow \hat{v}_2 = \dfrac{PL^4}{1024\,EI}, \quad r = \dfrac{v(L/2)-\hat{v}_2}{v(L/2)} = 62,5\,\% \\ 1^{\text{er}}\text{ orden} \rightarrow \hat{v}_2 = \dfrac{PL^4}{1536\,EI}, \quad r = \dfrac{v(L/2)-\hat{v}_2}{v(L/2)} = 75\,\% \end{cases}$$

Con carácter general, el esquema de 2º orden será más preciso que el de 1er orden y convergerá mucho más rápidamente a la solución exacta a medida que $h \rightarrow 0$.

Con $h = L/4$ la solución del esquema de 2º orden es un poco mejor (62,5 % de error) que la del esquema de 1er orden (75 % de error) pero esto es accidental.

Nota: Alternativamente, podría haberse planteado un esquema de 2º orden extendiendo el dominio, lo que implica incluir los nodos $x_{-1} = -h$, $x_{n+1} = L+h$.

<u>Esquema de 2º orden por extensión de dominio</u>

$i = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{cases} v(x_0) = 0 \\ v'(x_0) = \dfrac{-v(x_{-1}) + v(x_1)}{2h} + \Theta(h^2) \\ v''''(x_i) - \dfrac{P}{EI} = \dfrac{v(x_{i-2}) - 4v(x_{i-1}) + 6v(x_i) - 4v(x_{i+1}) + v(x_{i+2})}{h^4} + \Theta(h^2) - \dfrac{P}{EI} = 0 \\ v'(x_n) = \dfrac{-v(x_{n-1}) + v(x_n)}{2h} + \Theta(h^2) \\ v(x_n) = 0 \end{cases}$$

Despreciando errores locales de truncamiento

$$\begin{cases} \hat{v}_0 = 0 \\ \dfrac{-\hat{v}_{-1} + \hat{v}_1}{2h} = 0 \\ \dfrac{\hat{v}_{i-2} - 4\hat{v}_{i-1} + 6\hat{v}_i - 4\hat{v}_{i+1} + \hat{v}_{i+2}}{h^4} - \dfrac{p}{EI} = 0 \; ; i = 1, \ldots, n-1 \\ \dfrac{-\hat{v}_{n-1} + \hat{v}_{n+1}}{2h} = 0 \\ \hat{v}_n = 0 \end{cases}$$

Los puntos "fantasma" (x_{-1}, x_{n+1}) se pueden eliminar, pues

$$\begin{cases} \hat{v}_{-1} = \hat{v}_1 \\ \hat{v}_{n+1} = \hat{v}_{n-1} \end{cases}$$

Sustituyendo $\hat{v}_{-1} = \hat{v}_1$ en la ecuación para $i = 1$,

y $\hat{v}_{n+1} = \hat{v}_{n-1}$ en la ecuación para $i = n-1$,

se obtiene

$$\begin{cases} \hat{v}_0 = 0 \\ \dfrac{-4\hat{v}_0 + 7\hat{v}_1 - 4\hat{v}_2 + \hat{v}_3}{h^4} - \dfrac{p}{EI} = 0 \\ \dfrac{\hat{v}_{i-2} - 4\hat{v}_{i-1} + 6\hat{v}_i - 4\hat{v}_{i+1} + \hat{v}_{i+2}}{h^4} - \dfrac{p}{EI} = 0 \; ; i = 2, \ldots, n-2 \\ \dfrac{\hat{v}_{n-3} - 4\hat{v}_{n-2} + 7\hat{v}_{n-1} - 4\hat{v}_n}{h^4} - \dfrac{p}{EI} = 0 \\ \hat{v}_n = 0 \end{cases}$$

Para $n=4 \rightarrow h = L/4$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ PL^4/256EI \\ PL^4/256EI \\ PL^4/256EI \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Resolviendo: $\hat{v}_0 = 0, \ \hat{v}_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL^4}{256EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

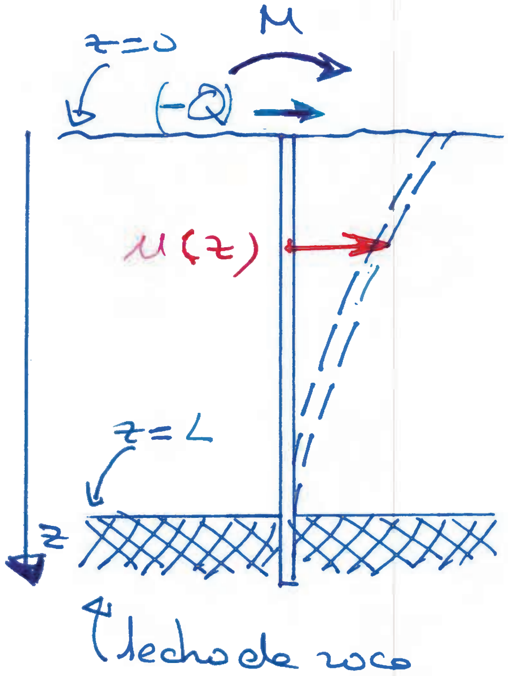
Por simetría $\hat{v}_1 = \hat{v}_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{Bmatrix} = \frac{PL^4}{256EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Luego $\cancel{2}\hat{v}_2 = \cancel{2} \frac{PL^4}{256EI} \rightarrow \begin{cases} \hat{v}_2 = \dfrac{PL^4}{256EI} \\ \hat{v}_1 = \hat{v}_3 = \dfrac{5PL^4}{2048EI} \end{cases}$

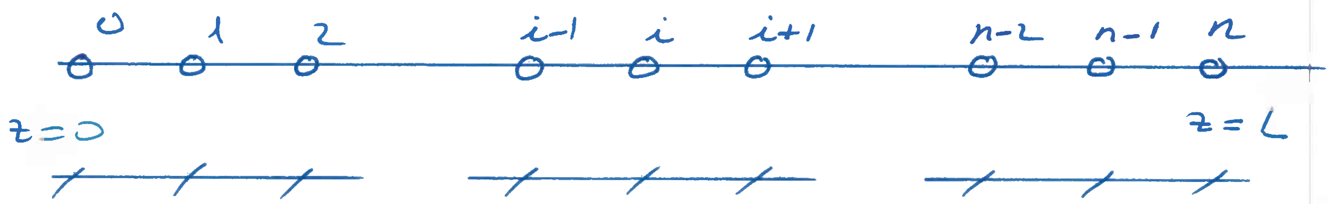
Esta solución tiene un error $r = \dfrac{v(L/2) - \hat{v}_2}{v(L/2)} = -50\%$

Es lo que tiene el menor error en valor absoluto de las tres, pero esto es accidental. Lo importante es que es de 2º orden, como lo desarrollado en el apartado a).

$$\begin{cases} \dfrac{d^4u}{dz^4} + \dfrac{K}{EI}u = 0 \quad ; \quad 0<z<L \; ; \\[2mm] z=L \Rightarrow u=0 \, , \quad \dfrac{du}{dz} = 0 \\[2mm] z=0 \Rightarrow \dfrac{d^2u}{dz^2} = \dfrac{M}{EI} \, , \quad \dfrac{d^3u}{dz^3} = -\dfrac{Q}{EI} \end{cases}$$



Discretización:



$h = L/n$

$z_i = i \cdot h$

Plantearemos:

$$\left.\begin{cases} u''''(z_i) + \beta u(z_i) = 0 \quad ; \quad i = 2, \ldots, n-2 \\ u'''(z_0) = -Q/EI \\ u''(z_0) = M/EI \\ u'(z_n) = 0 \\ u(z_n) = 0 \end{cases}\right\} \text{con } \beta = \frac{K}{EI}$$

Utilizaremos esquemas de 2º orden para todas las derivadas.

En particular:

$$\begin{cases} u''''(z_i) = \dfrac{u(z_{i-2}) - 4u(z_{i-1}) + 6u(z_i) - 4u(z_{i+1}) + u(z_{i+2})}{h^4} + \theta(h^2) \\[2ex] u'(z_n) = \dfrac{u'(z_{n-2}) - 4u(z_{n-1}) + 3u(z_n)}{2h} + \theta(h^2) \end{cases}$$

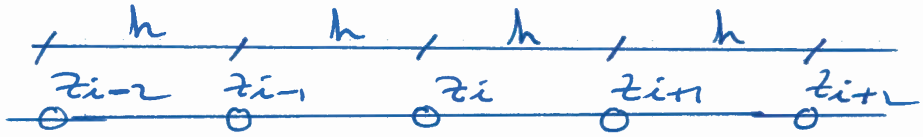
Para obtener $u''(z_0)$ con errores de $2^{\underline{o}}$ orden necesitaremos

$$\left.\begin{cases} u(z_0),\ u(z_1),\ u(z_2) \rightarrow 1^{\underline{a}} \text{ orden} \\ u(z_3) \end{cases}\right\} \rightarrow 2^{\underline{o}} \text{ orden}$$

Para obtener $u'''(z_0)$ con errores de $3^{\underline{a}}$ orden necesitaremos

$$\left.\begin{cases} u(z_0),\ u(z_1),\ u(z_2),\ u(z_3) \rightarrow 1^{\underline{a}} \text{ orden} \\ u(z_4) \end{cases}\right\} \rightarrow 2^{\underline{o}} \text{ orden}$$

<u>Deducción de $u''''(z_i)$</u>



$$u(z_{i\pm1}) = u(z_i) \pm h\, u'(z_i) + \frac{h^2}{2} u''(z_i) \pm \frac{h^3}{6} u'''(z_i) + \frac{h^4}{24} u''''(z_i) \pm \frac{h^5}{120} u^{V}(z_i) + \frac{h^6}{720} u^{VI}(z_i) \pm \frac{h^7}{5040} u^{VII}(z_i) + \theta(h^8)$$

$$u(z_{i\pm2}) = u(z_i) \pm 2h\, u'(z_i) + \frac{4h^2}{2} u''(z_i) \pm \frac{8h^3}{6} u'''(z_i) + \frac{16h^4}{24} u''''(z_i) \pm \frac{32h^5}{120} u^{V}(z_i) + \frac{64h^6}{720} u^{VI}(z_i) \pm \frac{128h^7}{5040} u^{VII}(z_i) + \theta(h^8)$$

Disponemos estos valores en forma matricial:

OSC

$$\begin{Bmatrix} u(t_{i+1}) \\ u(t_{i-1}) \\ u(t_{i+2}) \\ u(t_{i-2}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 64 & -128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(t_i) \\ h\,u'(t_i) \\ \frac{h^2}{2} u''(t_i) \\ \frac{h^3}{6} u'''(t_i) \\ \frac{h^4}{24} u''''(t_i) \\ \frac{h^5}{120} u^{V}(t_i) \\ \frac{h^6}{720} u^{VI}(t_i) \\ \frac{h^7}{5040} u^{VII}(t_i) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} O(h^8) \\ O(h^8) \\ O(h^8) \\ O(h^8) \end{Bmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

Pretendemos obtener una combinación lineal del tipo

$$\alpha_1 u(t_{i+1}) + \alpha_{-1} u(t_{i-1}) + \alpha_2 u(t_{i+2}) + \alpha_{-2} u(t_{i-2})$$

que nos permita despejar $u''''(t_i)$. (*)

Luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 & -8 \\ 1 & 1 & 16 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_{-1} \\ \alpha_2 \\ \alpha_{-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Si adoptamos un esquema simétrico,

$$\alpha_{-1} = \alpha_1, \qquad \alpha_{-2} = \alpha_2,$$

automáticamente se satisfarán las ecuaciones 1ª y 3ª.

Además, se anularán los términos de $u^{V}(t_i)$, $u^{VII}(t_i)$, etc.

(*) Sin que intervengan $u'(t_i)$, $u''(t_i)$, $u'''(t_i)$

05d

Luego basta con imponer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

cuya solución (trivial) es $\alpha_1 = -4/24$, $\alpha_2 = 1/24$.

Utilizando estos valores obtenemos:

$$\frac{1}{24}\left(-4u(t_{i+1}) - 4u(t_{i-1}) + u(t_{i+2}) + u(t_{i-2})\right)$$

$$= \frac{1}{24}(-4 - 4 + 1 + 1)\, u(t_i)$$

$$+ 1 \cdot \frac{h^4}{24} u''''(t_i)$$

$$+ \frac{1}{24}(-4 - 4 + 64 + 64) \frac{h^6}{720} u^{VI}(t_i)$$

$$+ \mathcal{O}(h^8)$$

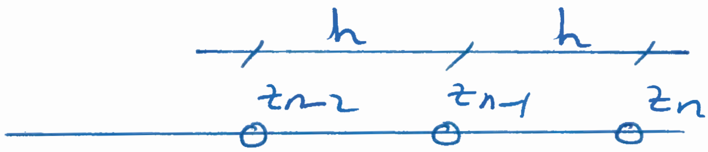
Los restantes términos (en $u'(t_i)$, $u''(t_i)$, $u'''(t_i)$, $u^{V}(t_i)$, $u^{VII}(t_i)$) son nulos.

Despejando:

$$\boxed{u''''(t_i) = \frac{u(t_{i-2}) - 4u(t_{i-1}) + 6u(t_i) - 4u(t_{i+1}) + u(t_{i+2})}{h^4} \underbrace{- \frac{1}{6} h^2 u^{VI}(t_i) + \mathcal{O}(h^4)}_{\mathcal{O}(h^2)}}$$

OSE

Deducción de $u'(t_n)$



$$u(t_{n-1}) = u(t_n) - h\,u'(t_n) + \frac{h^2}{2} u''(t_n) - \frac{h^3}{6} u'''(t_n) + \Theta(h^4)$$

$$u(t_{n-2}) = u(t_n) - 2h\,u'(t_n) + \frac{4h^2}{2} u''(t_n) - \frac{8h^3}{6} u'''(t_n) + \Theta(h^4)$$

Disponemos estos valores en formato matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(t_{n-1}) \\ u(t_{n-2}) \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & \downarrow & \downarrow & \\ & 1 & 0 & \end{array} \end{array} \begin{Bmatrix} u(t_n) \\ h\,u'(t_n) \\ \frac{h^2}{2} u''(t_n) \\ \frac{h^3}{6} u'''(t_n) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Theta(h^4) \\ \Theta(h^4) \end{Bmatrix}$$

Pretendemos obtener una combinación lineal del tipo

$$\alpha_{n-1}\, u(t_{n-1}) + \alpha_{n-2}\, u(t_{n-2})$$

que nos permita despejar $u'(t_n)$.

Exigiremos que el término en $u''(t_n)$ se anule, para que el error local de truncamiento sea de 2º orden.

Luego:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{-1} \\ \alpha_{-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

cuya solución (trivial) es $\alpha_{-1} = -4/2$, $\alpha_{-2} = 1/2$

Utilizando estos valores obtenemos:

$$\frac{1}{2}\left(-4\,u(t_{n-1}) + u(t_{n-2})\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(-4+1)\, u(t_n) \\ &+ 1 \; h \; u'(t_n) \\ &+ \frac{1}{2}(4-8)\,\frac{h^3}{6}\, u'''(t_n) \\ &+ O(h^4) \end{aligned}$$

El término restante (en $u''(t_n)$) es nulo.

Despejando:

$$\boxed{\begin{aligned} u'(t_n) = {} & \frac{u(t_{n-2}) - 4\,u(t_{n-1}) + 3\,u(t_n)}{2h} \\ & + \underbrace{\frac{1}{3} h^2 u'''(t_n) + O(h^3)}_{O(h^2)} \end{aligned}}$$

Se recomienda deducir, como ejercicio, las expresiones

$$\left\{ \begin{aligned} u''(t_0) &= \frac{2u(t_0) - 5u(t_1) + 4u(t_2) - u(t_3)}{h^2} + \underbrace{\frac{11}{12} h^2 u''''(t_0) + O(h^3)}_{O(h^2)} \\ u'''(t_0) &= \frac{-5u(t_0) + 18\,u(t_1) - 24\,u(t_2) + 14\,u(t_3) - 3\,u(t_4)}{2h^3} + \\ &\quad + \underbrace{7/4\, h^2 u^{V}(t_0) + O(h^3)}_{O(h^2)} \end{aligned} \right.$$

b) $$\left[\frac{d^4 u}{dz^4} + \beta u\right]\Bigg|_{z=z_i} = 0 \iff$$

$$\frac{u(z_{i-2}) - 4u(z_{i-1}) + 6u(z_i) - 4u(z_{i+1}) + u(z_{i+2})}{h^4} + \Theta(h^2) + \beta u(z_i) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{u(z_{i-2}) - 4u(z_{i-1}) + (6+\beta h^4)u(z_i) - 4u(z_{i+1}) + u(z_{i+2})}{h^4} + \Theta(h^2) = 0 \\ \dfrac{\hat{u}_{i-2} - 4\hat{u}_{i-1} + (6+\beta h^4)\hat{u}_i - 4\hat{u}_{i+1} + \hat{u}_{i+2}}{h^4} = 0 \end{cases}$$

donde $\hat{u}_i \simeq u(z_i)$

Luego, multiplicando por h^4, la ecuación del nodo i-ésimo es

$$\boxed{\hat{u}_{i-2} - 4\hat{u}_{i-1} + (6+\beta h^4)\hat{u}_i - 4\hat{u}_{i+1} + \hat{u}_{i+2} = 0}$$

c) Puesto que $h = \frac{L}{n}$, al refinar la discretización con el fin de obtener una solución más precisa sucederá que

$$6 + \beta h^4 \to 6 \quad \text{cuando } h \to 0$$

En consecuencia, a partir de un cierto valor de n el valor de βh^4 será del orden de los errores de redondeo con que se almacenará $(6+\beta h^4)$. Luego: el efecto del término será del orden de los errores de redondeo, y por tanto inapreciable $\Rightarrow$ NO SE PUEDE RESOLVER ASÍ EL PROBLEMA

OSh

d) Para obtener una solución de alta precisión se podrá aplicar el método de SHOOTING:

- Se suponen conocidos $u(0)$, $u'(0)$
- Se resuelve el problema como un problema de valor inicial $\Rightarrow$ se obtienen aproximaciones de $u(1)$, $u'(1)$
- Se reajustan los valores de $u(0)$, $u'(0)$ para que $u(1)=0$, $u'(1)=0$ hasta convergencia.

Nota complementaria al apartado c):

Cuando h es suficientemente pequeña,

$$6+\beta h^4 \simeq 6$$

por lo que el resultado que se obtiene equivale a suponer

$$\beta = 0,$$

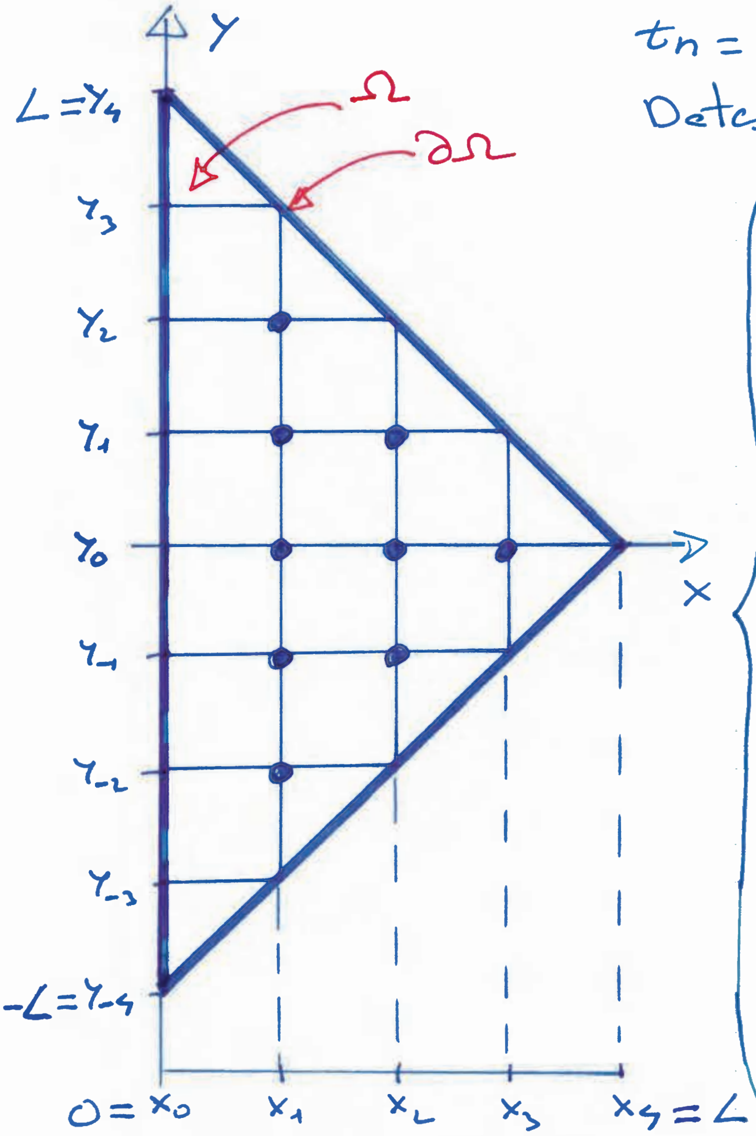
por lo que la solución corresponde al problema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^4u}{dz^4} = 0 \\ u(L) = u'(L) = 0 \\ u''(0) = M/EI, \; u'''(L) = -Q/EI \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underline{\text{Una ménsula}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\quad (x,y)\in\Omega,\ t>t_0$$

$$t=t_0 \Longrightarrow u = f(x,y)\ ,\quad (x,y)\in\Omega$$

$$t>t_0 \Longrightarrow u = g(x,y,t)\ ,\quad (x,y)\in\partial\Omega$$



$t_n = t_0 + n\Delta t$

Datos:

$$\begin{cases}
u(x_i,y_j,t_0)=f(x_i,y_j)\\
u(x_0,y_4,t_n)=g(x_0,y_4,t_n)\\
u(x_0,y_3,t_n)=g(x_0,y_3,t_n)\\
u(x_0,y_2,t_n)=g(x_0,y_2,t_n)\\
u(x_0,y_1,t_n)=g(x_0,y_1,t_n)\\
u(x_0,y_0,t_n)=g(x_0,y_0,t_n)\\
u(x_0,y_{-1},t_n)=g(x_0,y_{-1},t_n)\\
u(x_0,y_{-2},t_n)=g(x_0,y_{-2},t_n)\\
u(x_0,y_{-3},t_n)=g(x_0,y_{-3},t_n)\\
u(x_0,y_{-4},t_n)=g(x_0,y_{-4},t_n)\\
u(x_1,y_3,t_n)=g(x_1,y_3,t_n)\\
u(x_1,y_{-3},t_n)=g(x_1,y_{-3},t_n)\\
u(x_2,y_2,t_n)=g(x_2,y_2,t_n)\\
u(x_2,y_{-2},t_n)=g(x_2,y_{-2},t_n)\\
u(x_3,y_1,t_n)=g(x_3,y_1,t_n)\\
u(x_3,y_{-1},t_n)=g(x_3,y_{-1},t_n)\\
u(x_4,y_0,t_n)=g(x_4,y_0,t_n)
\end{cases}$$

(para $t_n>t_0$)

Incógnitas:

$$\begin{cases}
u(x_1,y_2,t_n),\\
u(x_1,y_1,t_n),\ u(x_2,y_1,t_n),\\
u(x_1,y_0,t_n),\ u(x_2,y_0,t_n),\ u(x_3,y_0,t_n),\\
u(x_1,y_{-1},t_n),\ u(x_2,y_{-1},t_n),\\
u(x_1,y_{-2},t_n)
\end{cases}$$

para $t_n>t_0$.

Método de Crank–Nicolson

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\Bigg|_{\substack{x=x_i,\ y=y_j \\ \tau=\tau_{n+1/2}=\frac{\tau_n+\tau_{n+1}}{2}}}$$

Aproximaciones en diferencias:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial \tau}\Bigg|_{\substack{x=x_i,\,y=y_j\\ \tau=\tau_{n+1/2}}} = \frac{u(x_i,y_j,\tau_{n+1})-u(x_i,y_j,\tau_n)}{\Delta\tau} + O(\Delta\tau^2)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Bigg|_{\substack{x=x_i,\,y=y_j\\ \tau=\tau_{n+1/2}}} = \frac{1}{2}\left[\frac{u(x_{i-1},y_j,\tau_{n+1})-2u(x_i,y_j,\tau_{n+1})+u(x_{i+1},y_j,\tau_{n+1})}{\Delta x^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{u(x_{i-1},y_j,t_n)-2u(x_i,y_j,t_n)+u(x_{i+1},y_j,\tau_n)}{\Delta x^2}\right]+\\
&\qquad+O(\Delta x^2+\Delta t^2)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Bigg|_{\substack{x=x_i,\,y=y_j\\ \tau=\tau_{n+1/2}}} = \frac{1}{2}\left[\frac{u(x_i,y_{j-1},\tau_{n+1})-2u(x_i,y_j,\tau_{n+1})+u(x_i,y_{j+1},t_{n+1})}{\Delta y^2}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{u(x_i,y_{j-1},\tau_n)-2u(x_i,y_j,t_n)+u(x_i,y_{j+1},\tau_n)}{\Delta y^2}\right]+\\
&\qquad+O(\Delta y^2+\Delta t^2)
\end{aligned}\right.$$

$$\Delta x=\Delta y = h = L/4 \quad ; \quad \lambda = \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2}=\frac{\Delta\tau}{\Delta y^2}=\frac{\Delta\tau}{h^2}$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\frac{u(x_i,y_j,t_{n+1})-u(x_i,y_j,t_n)}{\Delta\tau}+O(\Delta\tau^2) = O(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta\tau^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{u(x_{i-1},y_j,t_{n+1})-2u(x_i,y_j,t_{n+1})+u(x_{i+1},y_j,\tau_{n+1})}{\Delta x^2}+\frac{u(x_{i-1},y_j,\tau_n)-2u(x_i,y_j,\tau_n)+u(x_{i+1},y_j,\tau_n)}{\Delta x^2}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{u(x_i,y_{j-1},t_{n+1})-2u(x_i,y_j,\tau_{n+1})+u(x_i,y_{j+1},\tau_{n+1})}{\Delta y^2}+\frac{u(x_i,y_{j-1},\tau_n)-2u(x_i,y_j,\tau_n)+u(x_i,y_{j+1},\tau_n)}{\Delta y^2}\right]$$

Despreciamos errores locales de truncamiento (de 2º orden) y aproximamos

$$\hat{u}_{i,j}^{n} \simeq u(x_i, y_j, t_n)$$

Definimos

$$w_{i,j}^{n} = \overbrace{u(x_i, y_j, t_{n+1})}^{\hat{u}_{i,j}^{n+1}} + \overbrace{u(x_i, y_j, t_n)}^{\hat{u}_{i,j}^{n}} \Big\} \Rightarrow \text{DATOS}$$

para $(x_i, y_j) \in \partial\Omega$

Se obtiene:

$$\frac{\hat{u}_{i,j}^{n+1} - \hat{u}_{i,j}^{n}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{u}_{i-1,j}^{n+1} - 2\hat{u}_{i,j}^{n+1} + \hat{u}_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\hat{u}_{i-1,j}^{n} - 2\hat{u}_{i,j}^{n} + \hat{u}_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{u}_{i,j-1}^{n+1} - 2\hat{u}_{i,j}^{n+1} + \hat{u}_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{\hat{u}_{i,j-1}^{n} - 2\hat{u}_{i,j}^{n} + \hat{u}_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2}\right]$$

Agrupando términos:

$$(2+4\lambda)\hat{u}_{i,j}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i-1,j}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i+1,j}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i,j-1}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i,j+1}^{n+1} =$$

$$= (2-4\lambda)\hat{u}_{i,j}^{n} + \lambda\hat{u}_{i-1,j}^{n} + \lambda\hat{u}_{i+1,j}^{n} + \lambda\hat{u}_{i,j-1}^{n} + \lambda\hat{u}_{i,j+1}^{n}$$

Definimos:

$$\mu = 2+4\lambda \; ; \quad \delta = 2-4\lambda \; ;$$

Luego:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu\hat{u}_{i,j}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i-1,j}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i+1,j}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i,j-1}^{n+1} - \lambda\hat{u}_{i,j+1}^{n+1} = \\ &= \delta\hat{u}_{i,j}^{n} + \lambda\hat{u}_{i-1,j}^{n} + \lambda\hat{u}_{i+1,j}^{n} + \lambda\hat{u}_{i,j-1}^{n} + \lambda\hat{u}_{i,j+1}^{n} \end{aligned}}$$

Planteamos la ecuación anterior en los nodos y escribimos el sistema en forma matricial:

$$
\begin{bmatrix}
\mu & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\lambda & \mu & -\lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & \mu & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & 0 & \mu & -\lambda & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda & -\lambda & \mu & -\lambda & 0 & -\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \mu & -\lambda & -\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & -\lambda & \mu & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \mu
\end{bmatrix}
\left\{\begin{matrix}
\hat{u}_{12}^{n+1} \\ \hat{u}_{11}^{n+1} \\ \hat{u}_{21}^{n+1} \\ \hat{u}_{10}^{n+1} \\ \hat{u}_{20}^{n+1} \\ \hat{u}_{30}^{n+1} \\ \hat{u}_{1,-1}^{n+1} \\ \hat{u}_{2,-1}^{n+1} \\ \hat{u}_{1,-2}^{n+1}
\end{matrix}\right\}
=
\begin{bmatrix}
\delta & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \delta & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & \delta & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & \delta & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & \lambda & \delta & \lambda & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \delta & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \delta & \lambda & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \lambda & \delta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \delta
\end{bmatrix}
\left\{\begin{matrix}
\hat{u}_{12}^{n} \\ \hat{u}_{11}^{n} \\ \hat{u}_{21}^{n} \\ \hat{u}_{10}^{n} \\ \hat{u}_{20}^{n} \\ \hat{u}_{30}^{n} \\ \hat{u}_{1,-1}^{n} \\ \hat{u}_{2,-1}^{n} \\ \hat{u}_{1,-2}^{n}
\end{matrix}\right\}
+
$$

$$
+
\left\{\begin{matrix}
\lambda(w_{1,3}^{n} + w_{0,2}^{n} + w_{2,2}^{n}) \\
\lambda(w_{0,1}^{n}) \\
\lambda(w_{2,2}^{n} + w_{3,1}^{n}) \\
\lambda(w_{0,0}^{n}) \\
0 \\
\lambda(w_{3,1}^{n} + w_{4,0}^{n} + w_{3,-1}^{n}) \\
\lambda(w_{0,-1}^{n}) \\
\lambda(w_{2,-2}^{n} + w_{3,-1}^{n}) \\
\lambda(w_{0,-2}^{n} + w_{1,-3}^{n} + w_{2,-2}^{n})
\end{matrix}\right\}
$$

Notas:

- Ordenando las ecuaciones y las incógnitas de esta forma, las matrices suelen simétricas.
  No es fácil saber a priori si esto va a suceder.
  Y puede que no sea posible sin manipular las ecuaciones

- Conocidos los valores de u para $t=\tau_0$, la solución del sistema anterior permite calcular los valores de u para $t=\tau_1$, y así sucesivamente.

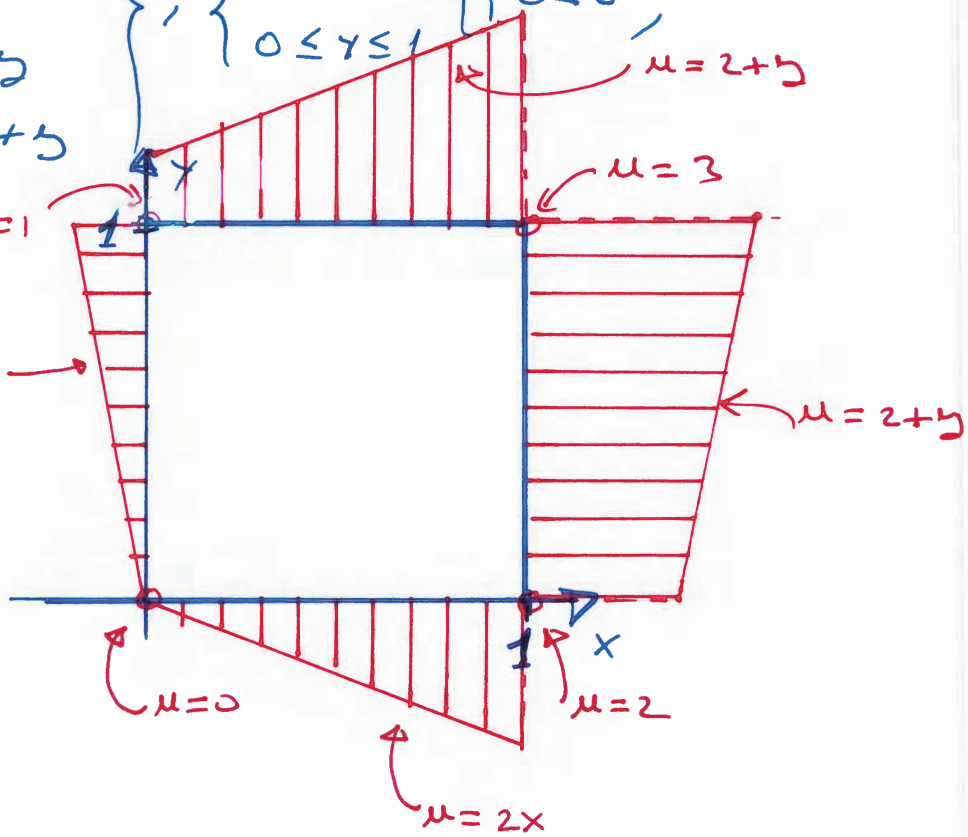
  El sistema que hay que resolver para calcular la solución en $t=\tau_{n+1}$ a partir de la solución en $t=\tau_n$ es siempre el mismo, por lo que puede factorizarse la matriz la primera vez y resolver rápidamente el sistema a partir de ese momento.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \begin{Bmatrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{Bmatrix}, \quad 0<\tau;$$

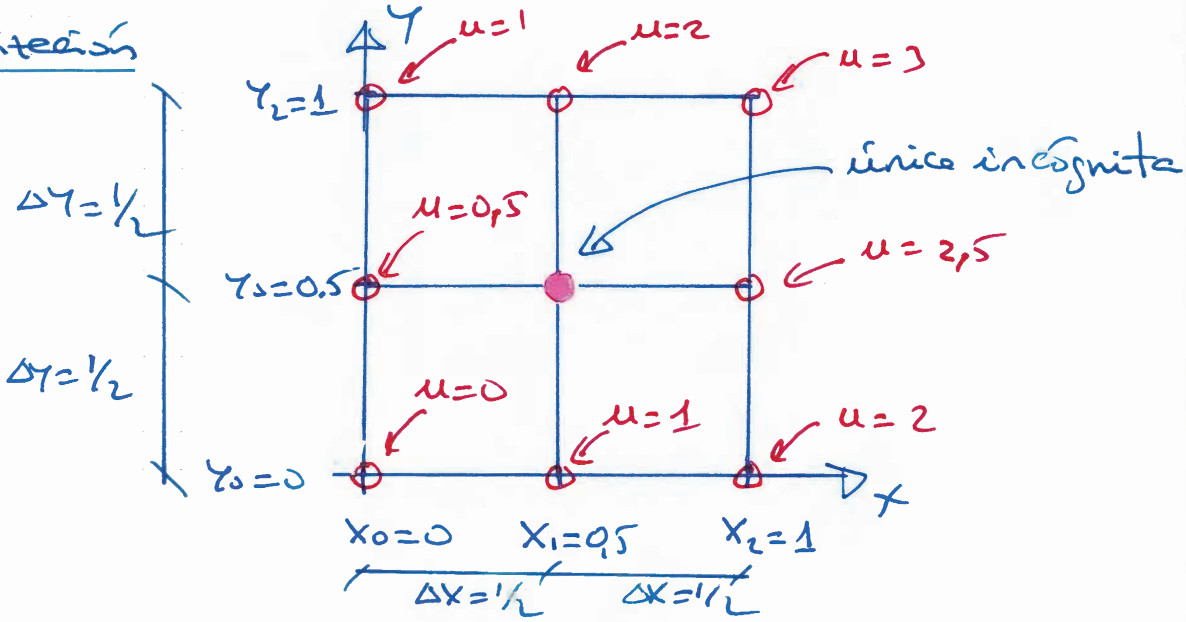
$$u(x,y,0)=u_0, \quad \begin{Bmatrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{Bmatrix};$$

$$\left\{\begin{matrix} u(x,0,\tau)=2x \\ u(x,1,\tau)=1+2x \\ u(0,y,\tau)=y \\ u(1,y,\tau)=2+y \end{matrix}\right\}, \quad \begin{Bmatrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{Bmatrix}, \quad 0<\tau;$$

$\tau>0 \Rightarrow$



a) Discretización



Solución estacionaria

Para $t\to\infty$, $u_t=0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$$\begin{cases} u(x,0)=2x \;;\; u(x,1)=1+2x\;; \\ u(0,y)=y \;;\; u(1,y)=2+y\;; \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $\boxed{u(x,y)=y+2x}$ resuelve el problema anterior.

b) Sea $\hat{u}_n \simeq u(x_1,y_1,t_n)$; $\begin{cases} \Delta x=\Delta y=1/2 \\ \lambda=\Delta t/(\Delta x)^2=\Delta t/(\Delta y)^2 \end{cases}$

planteamos directamente los métodos numéricos.

Explícito: $\dfrac{\hat{u}_{n+1}-\hat{u}_n}{\Delta t}=\dfrac{0{,}5-2\hat{u}_n+2{,}5}{\Delta x^2}+\dfrac{1-2\hat{u}_n+2}{\Delta y^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_{n+1}=6\lambda+(1-4\lambda)\hat{u}_n} \;;\; n\geq 1$$

Implícito: $\dfrac{\hat{u}_{n+1}-\hat{u}_n}{\Delta t}=\dfrac{0{,}5-2\hat{u}_{n+1}+2{,}5}{\Delta x^2}+\dfrac{1-2\hat{u}_{n+1}+2}{\Delta y^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_{n+1}=(6\lambda+\hat{u}_n)/(1+4\lambda)} \;;\; n\geq 0$$

Crank-Nicolson: $\dfrac{\hat{u}_{n+1}-\hat{u}_n}{\Delta t}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{0{,}5-2\hat{u}_{n+1}+2{,}5}{\Delta x^2}+\dfrac{1-2\hat{u}_{n+1}+2}{\Delta y^2}\right]+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{0{,}5-2\hat{u}_n+2{,}5}{\Delta x^2}+\dfrac{1-2\hat{u}_n+2}{\Delta y^2}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_{n+1}=\left(6\lambda+(1-2\lambda)\hat{u}_n\right)/(1+2\lambda)} \;;\; n\geq 1$$

En todos los casos, $\hat{u}_0=u_0$.

Para $n=0$ los métodos Explícito y de Crank-Nicolson tienen una expresión diferente, pues las condiciones iniciales predominan sobre las de contorno.

Así:

Explícito, $n=0$: $\dfrac{\hat{u}_1 - u_0}{\Delta\tau} = \dfrac{u_0 - \cancel{2u_0 + u_0}}{\Delta x^2} + \dfrac{u_0 - \cancel{2u_0 + u_0}}{\Delta y^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_1 = u_0}$$

Crank-Nicolson, $n=0$: $\dfrac{\hat{u}_1 - u_0}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}\left[\dfrac{0{,}5 - 2\hat{u}_1 + 2{,}5}{\Delta x^2} + \dfrac{1 - 2\hat{u}_1 + 2}{\Delta y^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\dfrac{u_0 - \cancel{2u_0 + u_0}}{\Delta x^2} + \dfrac{u_0 - \cancel{2u_0 + u_0}}{\Delta y^2}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_1 = (3\lambda + u_0)/(1+2\lambda)}$$

Como las condiciones iniciales valen para $t=0$ y las de contorno valen para $\tau>0$, podría ser recomendable tomar un valor intermedio si no coincide su valor para $n=0$

Así:

Explícito, $n=0$: $\dfrac{\hat{u}_1 - u_0}{\Delta\tau} = \dfrac{\frac{1}{2}(u_0+0{,}5) - 2u_0 + \frac{1}{2}(u_0+2{,}5)}{\Delta x^2} + \dfrac{\frac{1}{2}(u_0+1) - 2u_0 + \frac{1}{2}(u_0+2)}{\Delta y^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_1 = 3\lambda + (1-2\lambda)u_0}$$

Crank-Nicolson, $n=0$: $\dfrac{\hat{u}_1 - u_0}{\Delta\tau} = \frac{1}{2}\left[\dfrac{0{,}5 - 2\hat{u}_1 + 2{,}5}{\Delta x^2} + \dfrac{1 - 2\hat{u}_1 + 2}{\Delta y^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\dfrac{\frac{1}{2}(u_0+0{,}5) - 2u_0 + \frac{1}{2}(u_0+2{,}5)}{\Delta x^2} + \dfrac{\frac{1}{2}(u_0+1) - 2u_0 + \frac{1}{2}(u_0+2)}{\Delta y^2}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_1 = (4{,}5\lambda + (1-\lambda)u_0)/(1+2\lambda)}$$

Los valores de $\hat{u}_1$ dependen del método elegido y de cómo se introduzcan las condiciones iniciales para $n=0$.

Para $n \geq 1$, cada método tiene su propia fórmula iterativa, que se mantiene invariable para todas las iteraciones posteriores.

Plantearemos la solución general a partir de $\hat{u}_1$.

todos los métodos adoptan la forma.

$$\hat{u}_{n+1} = A + B\hat{u}_n \quad ; \; n \geq 1$$

luego
$$\begin{cases} \hat{u}_2 = A + B\hat{u}_1 \\ \hat{u}_3 = A + B\hat{u}_2 = A(1+B) + B^2\hat{u}_1 \\ \hat{u}_4 = A + B\hat{u}_3 = A(1+B+B^2) + B^3\hat{u}_1 \\ \dots \\ \hat{u}_{n+1} = A + B\hat{u}_n = A\underbrace{(1+B+B^2+\dots+B^{n-1})}_{\frac{1-B^{n-1}\cdot B}{1-B}} + B^n\hat{u}_1 \end{cases}$$

Luego:
$$\hat{u}_{n+1} = A\,\frac{1-B^n}{1-B} + B^n\hat{u}_1 = \frac{A}{1-B} + B^n\left(\hat{u}_1 - \frac{A}{1-B}\right)$$

Donde:
$$\begin{cases} \text{Explícito: } A = 6\lambda \,,\; B = 1-4\lambda \\ \text{Implícito: } A = 6\lambda/(1+4\lambda) \,,\; B = 1/(1+4\lambda) \\ \text{Crank-Nicolson: } A = 6\lambda/(1+2\lambda) \,,\; B = (1-2\lambda)/(1+2\lambda) \end{cases}$$

Para que $\hat{u}_{n+1}$ converja a un valor estacionario es preciso que $B^n \to 0 \iff |B| < 1$.

Luego: $|B| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \hat{u}_n = \dfrac{A}{1-B}$ (independientemente del valor de $\hat{u}_1$, y partiendo del valor de u_0)

Para el Método Explícito

$$|1-4\lambda|<1 \iff \lambda \le 1/2 \Leftarrow \text{CONDICIONALMENTE CONVERGENTE}$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = \frac{6\lambda}{1-(1-4\lambda)} = 3/2 \Leftarrow \text{CORRECTO}$$

Para el Método Implícito

$$\frac{1}{(4+\lambda)} < 1 \quad \forall \lambda \Leftarrow \text{INCONDICIONALMENTE CONVERGENTE}$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = \frac{6\lambda/(1+4\lambda)}{1-1/(1+4\lambda)} = \frac{6\lambda}{(1+4\lambda)-1} = 3/2 \Leftarrow \text{CORRECTO}$$

Para el Método de Crank-Nicolson

$$|(1-2\lambda)/(1+2\lambda)| < 1 \quad \forall\lambda \Leftarrow \text{INCONDICIONALMENTE CONVERGENTE}$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = \frac{6\lambda/(1+2\lambda)}{1-(1-2\lambda)/(1+2\lambda)} = \frac{6\lambda}{(1+2\lambda)-(1-2\lambda)} = 3/2 \Leftarrow \text{CORRECTO}$$

Los resultados coinciden con los del análisis de estabilidad.

El planteamiento es diferente, pero en esencia los dos estudios analizan la naturaleza de los métodos.

1º Método

$$\underset{\rho \cancel{S} \Delta x}{\overset{\parallel}{m_i}} c_E (u_{i,n+1} - u_{i,n}) = -\partial \cancel{S} \left[(u_{i,n} - u_{i-1,n}) - (u_{i+1,n} - u_{i,n}) \right] \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u_{i,n+1} = \lambda u_{i-1,n} + (1-2\lambda) u_{i,n} + \lambda u_{i+1,n} \\ \lambda = \dfrac{\partial}{\rho c_E} \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{array}}$$

luego, es el MÉTODO EXPLÍCITO aplicado a la ecuación (no adimensionalizada):

$$\boxed{u_t = \frac{\partial}{\rho c_E} u_{xx}}$$

$\Rightarrow$ CONDICIÓN DE ESTABILIDAD : $\boxed{0 < \lambda \leq 1/2}$

2º Método

$$\underset{\rho \cancel{S} \Delta x}{\overset{\parallel}{m_i}} c_E (u_{i,n+1} - u_{i,n}) = -\partial \cancel{S} \left[\frac{(u_{i,n} - u_{i-1,n}) - (u_{i,n+1} - u_{i-1,n+1})}{2} + \frac{(u_{i+1,n} - u_{i,n}) - (u_{i+1,n+1} - u_{i,n+1})}{2} \right] \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} -\lambda u_{i-1,n+1} + 2(1+\lambda) u_{i,n+1} - \lambda u_{i+1,n+1} = \\ \quad = \lambda u_{i-1,n} + 2(1-\lambda) u_{i,n} + \lambda u_{i+1,n} \\ \lambda = \dfrac{\partial}{\rho c_E} \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{array}}$$

luego es el MÉTODO DE CRANK–NICOLSON aplicado a la misma ecuación.

$\Rightarrow$ INCONDICIONALMENTE ESTABLE

Elección de $\Delta\tau$, Δx

Deben de ser suficientemente pequeños.

En el 1º Método deben verificar $\frac{\delta}{\rho c_E} \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} < 1/2$

En el 2º Método pueden elegirse libremente.

Comparación entre los métodos

El primer método es explícito, por lo que su implementación es sencilla y el coste computacional por iteración será muy bajo.

El segundo método es implícito, por lo que su implementación es más complicada. En cada iteración hay que resolver un sistema de ecuaciones con matriz tridiagonal. Como la matriz no cambiará entre iteraciones, el coste computacional será mayor en la 1ª iteración, pero las iteraciones siguientes tendrán un coste computacional inferior.

A cambio, el primer método nos obligará a utilizar, en general, pasos de tiempo más pequeños, ya que debe cumplirse: $\Delta\tau \leq \frac{\rho c_E}{2\delta} \Delta x^2$. para que sea estable.

Por el contrario, el segundo método es estable de forma incondicional, lo que permite elegir libremente el valor de $\Delta\tau$ independientemente del valor de Δx. Además los resultados de la interpolación en el tiempo serán más precisos, por ser de 2º orden.