CÁLCULO NUMÉRICO **Curso 2023–2024, PRÁCTICA 4**

EDPs (Fecha de entrega **del prob. 9**: 03/05/2024)

1.– Obtener el esquema mínimo de discretización de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en una malla regular con una aproximación de cuarto orden.

2.– Discretizar la derivada $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ en un punto (x_i, y_j) de una malla rectangular equiespaciada en x y en y. Evaluar el error de truncamiento.

3.– Uno de los primeros estudios de Lagrange, a principios del siglo XVIII, fue el de propagación del sonido. Para ello se basó en las teorías de Newton (elasticidad) y supuso el medio compuesto por una sucesión de masas puntuales cuyos desplazamientos alrededor de su posición de equilibrio, $u_0(t)$, $u_1(t)$, ..., $u_{n+1}(t)$, están gobernados por la ley de Hooke, es decir

$$\begin{cases} u_1'' = C^2(u_0 - 2u_1 + u_2) \\ u_2'' = C^2(u_1 - 2u_2 + u_3) \\ \dots \\ u_n'' = C^2(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \end{cases}$$

Las partículas situadas en los extremos están fijas ($u_0(t) = u_{n+1}(t) = 0$), y las condiciones iniciales son $u_1(0) = u_{10}$, $u_2(0) = u_{20}$, ..., $u_n(0) = u_{n0}$, y $u_1'(0) = v_{10}$, $u_2'(0) = v_{20}$, ..., $u_n'(0) = v_{n0}$.

Se pide:

a) Plantear un algoritmo para la resolución del sistema de ecuaciones que tenga un error de truncamiento de orden cuatro.

b) Encontrar justificadamente la ecuación diferencial en derivadas parciales de la cual el sistema es una discretización. Interpretar físicamente el parámetro C.

4.– Si la viga del problema 5 de la práctica anterior es biempotrada, sus condiciones de contorno son consecuentemente:

$$v(0) = 0, \qquad v'(0) = 0, \qquad v(L) = 0, \qquad v'(L) = 0.$$

Para el caso de carga constante, se pide:

a) Escribir el sistema de ecuaciones que se obtiene al aplicar diferencias finitas discretizando el intervalo $[0, L]$ en n subintervalos iguales y utilizando aproximaciones de segundo orden para la ecuación diferencial y para las condiciones de contorno. Particularizar y resolver completamente el problema para $n = 4$.

b) Repetir el apartado anterior, utilizando esta vez aproximaciones de primer orden para las condiciones de contorno.

c) Comparar las dos aproximaciones obtenidas del desplazamiento del punto medio de la viga con la solución exacta $v(L/2) = \frac{PL^4}{384EI}$. ¿Cuál de las dos soluciones es más precisa? ¿Por qué?

5.– El comportamiento a flexión de un pilote con respuesta elástica del suelo puede modelarse mediante la ecuación:

$$\frac{d^4u}{dz^4} + \frac{K(z)}{EI}u = 0, \qquad 0 < z < L,$$

donde $u(z)$ es el desplazamiento horizontal del punto del pilote situado a una profundidad z respecto a la cota del terreno y $K(z)$ es un coeficiente de balasto que representa la variación de la interacción mecánica terreno-pilote con la profundidad.

En un cierto caso práctico de interés se supone que $K(z) = K$ (constante) y que las condiciones de contorno, correspondientes a cortante y momento impuestos en la superficie ($z = 0$) y empotramiento del pilote en profundidad ($z = L$), pueden escribirse en la forma:

$$\frac{d^3u}{dz^3} = -\frac{Q}{EI} \quad \text{y} \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{en } z = 0,$$

$$u = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dz} = 0 \qquad \text{en } z = L,$$

donde Q y M son los valores conocidos del cortante y del momento en la superficie.

Se plantea la resolución del problema mediante un esquema de diferencias finitas con aproximaciones de segundo orden para las derivadas, discretizando el intervalo $[0, L]$ en n subintervalos ($n \geq 4$) y utilizando EXCLUSIVAMENTE puntos nodales situados en este intervalo. Se pide:

a) Deducir las aproximaciones que deben utilizarse para la ecuación diferencial (derivada cuarta) y para la condición de contorno en derivada primera, y estimar razonadamente cuáles de los puntos nodales $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, intervendrán en la discretización de las condiciones de contorno restantes.

b) Siendo $h = L/n$, escribir la ecuación lineal correspondiente a discretizar la ecuación diferencial en el nodo z_i ($2 \leq i \leq n - 2$).

c) Analizando la ecuación obtenida en el apartado anterior, discutir razonadamente en qué medida el error de redondeo producido al calcular y almacenar los coeficientes diagonales de la matriz del sistema (coeficiente de u_i en la ecuación anterior) pueden desvirtuar totalmente este planteamiento para valores crecientes de n. ¿Es posible que la solución numérica que se obtenga al utilizar discretizaciones más finas tienda a la solución de una ecuación diferencial distinta? ¿A cuál?

d) A la vista de estas consideraciones, ¿qué método numérico debería utilizarse para resolver la ecuación diferencial con más precisión?

6.– Escribir la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes resultante de discretizar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

con condiciones de contorno tipo Dirichlet en el triángulo de vértices $(0, -L)$, $(0, L)$ y $(L, 0)$, siendo $\Delta x = \Delta y = L/4$, y utilizando el método de Crank-Nicolson.

7.– La ecuación que rige la conducción del calor en una placa cuadrada puede escribirse en la forma adimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1; \qquad 0 < y < 1; \qquad 0 < t;$$

siendo u la temperatura adimensional.

Se plantea la solución de esta ecuación con las condiciones de contorno:

$$u(x, 0, t) = 2x, \qquad u(x, 1, t) = 1 + 2x, \qquad u(0, y, t) = y, \qquad u(1, y, t) = 2 + y, \qquad 0 < t;$$

y la condición inicial:

$$u(x,y,0)=u_0, \qquad 0\le x\le 1; \qquad 0\le y\le 1;$$

Se pide:

a) Discretizar la placa utilizando 2 subintervalos en x y 2 subintervalos en y. Dibujar la malla, numerarla, y escribir la condición inicial y las condiciones de contorno resultantes. ¿Cuál es la solución estacionaria (a tiempo infinito) exacta de este problema?

b) Plantear completamente la solución del problema con la discretización anterior por los métodos: 1) explícito, 2) implícito, y 3) de Crank-Nicolson. En todos los casos, escribir explícitamente el valor de la temperatura en el nodo incógnita en cada iteración en función de la información disponible.

c) Obtener explícitamente, para cada uno de los métodos, el valor de la temperatura en el nodo incógnita en el instante de tiempo t_n en función de la temperatura inicial u_0 y del incremento de tiempo Δt. Analizar en cada caso qué condiciones debe cumplir Δt para que la solución numérica a tiempo infinito tienda a la solución exacta. ¿Tiene este análisis alguna relación con los de estabilidad y convergencia?

8.– Un ingeniero necesita calcular la distribución de temperaturas $u(x,t)$ de una barra cilíndrica de longitud L, sección S, densidad ρ, calor específico c_E y conductividad γ, aislada y cuyos extremos se mantienen a temperatura controlada. La EDP que rige el fenómeno es:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\gamma}{\rho c_E}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0<x<L; \qquad 0<t;$$

con las condiciones iniciales y de contorno

$$u(x,0)=u^0(x), \qquad 0\le x\le L; \qquad\qquad u(0,t)=\alpha(t), \quad u(L,t)=\beta(t), \qquad 0<t;$$

El ingeniero, que no está familiarizado con la teoría de EDPs, desarrolla un procedimiento específico para resolver este problema, y lo describe de la siguiente forma:

"La barra se sustituye por $N+1$ masas puntuales, equiespaciadas, separadas entre sí por una distancia $\Delta x = L/N$. En las intermedias ($i=1,2,\ldots,N-1$) se concentra una masa $m_i=\rho S\Delta x$, y en las extremas se concentra la mitad de este valor.

Sea $u_{i,n}$ la temperatura de la masa i en el instante de tiempo $t_n=n\Delta t$, y sea $Q_{i,n}$ el calor que fluye entre la masa i y la $i+1$ en el intervalo de tiempo $[t_n,t_{n+1}]$. En este intervalo la masa intermedia i recibe una cantidad de calor $Q_{i-1,n}$ de la masa anterior y cede $Q_{i,n}$ a la masa siguiente. La ganancia de calor se invierte en incrementar la temperatura, y por tanto:

$$m_i c_E(u_{i,n+1}-u_{i,n})=Q_{i-1,n}-Q_{i,n}.$$

Por otro lado, el flujo de calor entre la masa i y la masa $i+1$ se puede suponer constante en el intervalo de tiempo. Así, el calor total que fluye entre ambas masas se puede escribir como:

$$Q_{i,n}=-\gamma S(u_{i+1,n}-u_{i,n})\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Sustituyendo esta ecuación en la anterior, e imponiendo las condiciones iniciales y de contorno, se obtiene un procedimiento iterativo directo para calcular las temperaturas $u_{i,n+1}$ en función de las conocidas previamente. El método funciona bien para cualquier valor de N y Δt.

NOTA: Una aproximación más realista, consistiría en suponer que el flujo de calor entre cada dos masas es lineal en cada intervalo de tiempo, siendo el calor total:

$$Q_{i,n} = -\gamma S \left(\frac{(u_{i+1,n} - u_{i,n}) + (u_{i+1,n+1} - u_{i,n+1})}{2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Sin embargo, este segundo método es inaplicable en la práctica ya que no puede obtenerse una expresión sencilla para hallar las temperaturas, y no aporta ninguna ventaja."

SE PIDE: Desarrollar completamente los dos métodos descritos. ¿A qué métodos numéricos de solución de EDPs corresponden? ¿Pueden elegirse arbitrariamente N y Δt? En caso contrario, ¿qué relación deben verificar? ¿Es cierto que el segundo método es inaplicable y que no aporta ninguna ventaja? En caso contrario, explicar cómo debe aplicarse, y qué ventajas aporta.

9.– [PROBLEMA QUE SE ENTREGARÁ RESUELTO]

Sea una viga horizontal articulada–apoyada y cargada axialmente. Sea P el valor de la carga axial. En teoría de primer orden la viga no experimenta desplazamientos verticales. Según la teoría de pandeo de Euler (que considera efectos de segundo orden en 1ª aproximación) la ecuación que rige el comportamiento de la viga es

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{P}{EI} v$$

con las condiciones de contorno $v(0) = v(L) = 0$, donde $v(x)$ es el desplazamiento vertical.

Según esta teoría, sólo pueden existir estados deformacionales distintos de la solución trivial ($v(x) = 0$) para ciertos valores de la carga P. El menor de estos valores (P_E), que es el que provoca el fallo de la estructura, recibe el nombre de carga crítica de Euler. Se pide:

a) Adimensionalizar el problema, reduciéndolo a la forma

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = -\lambda^2 v, \qquad v(0) = v(1) = 0,$$

especificando el cambio de variable realizado, y la relación entre P y λ^2.

b) Escribir el problema de autovalores que se obtiene al aplicar diferencias finitas a la ecuación anterior, discretizando el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos iguales y empleando aproximaciones de segundo orden.

c) Obtener los valores mínimos de λ^2 para los que existen soluciones no triviales del sistema anterior ($v_i \neq 0$) en los casos $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$. Los problemas de autovalores correspondientes se resolverán algebraicamente. Hallar las correspondientes aproximaciones a la carga crítica P_E, y los errores relativos respecto a la solución exacta ($P_E = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$) y analizar la bondad de los resultados obtenidos.
