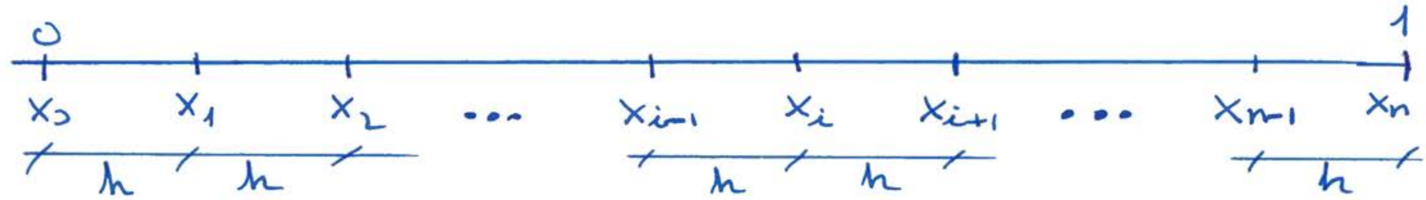
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \quad ; \quad x \in (0,1) \rightsquigarrow \varphi(x,y) = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



$h = \frac{1}{n}$, $x_i = x_0 + ih = ih$; $i = 0, \ldots, n$

a) Método de Euler (hacia delante) (*)

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) = 0 \\ y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i) = y_i + h \cdot 2x_i = y_i + 2ih^2 \end{cases}$$

b) Error local de truncamiento

$$\left.\begin{array}{l} \tau_i(h) = \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \varphi(x_i, y(x_i)) \\ \begin{cases} y(x) = x^2 \Rightarrow \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h^2} = \dfrac{(x_i+h)^2 - x_i^2}{h} = 2x_i + h \\ \varphi(x,y) = 2x \Rightarrow \varphi(x_i, y(x_i)) = 2x_i \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\tau_i(h) = (\cancel{2x_i} + h) - \cancel{2x_i} = h \Rightarrow \begin{cases} \text{CONSISTENTE} \\ \text{DE 1}^{\text{er}} \text{ ORDEN} \end{cases}$$

c) Error global de truncamiento

$$e_i^T = y(x_i) - y_i$$

$$\left.\begin{cases} y(x) = x^2 \Rightarrow y(x_i) = x_i^2 \\ \left.\begin{array}{l} y_i = y_{i-1} + h\varphi(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ \varphi(x,y) = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow y_i = y_{i-1} + h\,2x_{i-1} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

(*) Para simplificar la notación escribimos y_i en lugar de $\hat{y}_i$

$y_0 = 0$

$y_1 = y_0 + h \cdot 2x_0 = 0$

$y_2 = y_1 + h \cdot 2x_1 = 2h^2$

$y_3 = y_2 + h \cdot 2x_2 = 2h^2 + 4h^2 = 2h^2(1+2)$

$y_4 = y_3 + h \cdot 2x_3 = 2h^2(1+2) + 2h^2 \cdot 3 = 2h^2(1+2+3)$

$y_5 = y_4 + h \cdot 2x_4 = 2h^2(1+2+3) + 2h^2 \cdot 4 = 2h^2(1+2+3+4)$

$\dots$

$$\begin{aligned} y_i = y_{i-1} + h \cdot 2x_{i-1} &= 2h^2(1+2+\dots+(i-2)) + 2h^2(i-1) \\ &= 2h^2(1+2+\dots+(i-2)+(i-1)) \\ &= 2h^2 \frac{1+(i-1)}{2}(i-1) = h^2\, i\,(i-1) \\ &= (hi)(h(i-1)) = x_i \cdot x_{i-1} \\ &= x_i\,(x_i - h) \end{aligned}$$

Luego $e^T_i = x_i^2 - x_i(x_i - h) = x_i h$

Para $i = n \rightsquigarrow x_n = 1$, $y_n = x_n(x_n - h) = 1 - 1/n$

$e^T_n = x_n \cdot h = h = 1/n \Rightarrow$ DE 1ª ORDEN

$\lim_{n \to \infty} e^T_n = 0 \Rightarrow$ se comprueba que el método converge

d) Efectivamente, comprobamos que los resultados se comportan como predice la teoría.

1) Método de Euler hacia atrás (*)

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x_i, y_i) \end{cases}$$

con $\phi(x_i, y_i) = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1})$

luego: $y_{i+1} = y_i + h \cdot \underbrace{2x_{i+1}}_{\phi} = y_i + 2(i+1)h^2$

No es implícito en este caso porque $\varphi(x,y)$ no depende de y.

Error local de truncamiento

$$\left.\begin{array}{l} \tau_i(h) = \dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \phi(x_i, y(x_i)) \\ y(x) = x^2 \Rightarrow \dfrac{y(x_i+h) - y(x_i)}{h} = \dfrac{(x_i+h)^2 - x_i^2}{h} = 2x_i + h \\ \phi(x, y(x)) = \varphi(x+h, y(x+h)) = 2(x+h) \Rightarrow \\ \qquad \phi(x_i, y(x_i)) = 2(x_i+h) = 2x_i + 2h \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\tau_i(h) = (2x_i + h) - (2x_i + 2h) = -h \Rightarrow \begin{cases} \text{CONSISTENTE} \\ \text{DE } 1^{\underline{o}} \text{ ORDEN} \end{cases}$$

Error global de truncamiento

$e_i^T = y(x_i) - y_i$

$y(x) = x^2 \Rightarrow y(x_i) = x_i^2$

$$\left.\begin{array}{l} y_i = y_{i-1} + h\,\phi(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ \phi(x_{i-1}, y_{i-1}) = \varphi(x_i, y_i) = 2x_i \end{array}\right\} \Rightarrow y_i = y_{i-1} + h\,2x_i$$

(*) Para simplificar la notación escribimos y_i en lugar de $\hat{y}_i$

$y_0 = 0$

$y_1 = y_0 + h\,2x_1 = 2h^2$

$y_2 = y_1 + h\,2x_2 = 2h^2 + 4h^2 = 2h^2(1+2)$

$y_3 = y_2 + h\,2x_3 = 2h^2(1+2) + 2h^2 \cdot 3 = 2h^2(1+2+3)$

$y_4 = y_3 + h\,2x_4 = 2h^2(1+2+3) + 2h^2 4 = 2h^2(1+2+3+4)$

...

$$\begin{aligned} y_i = y_{i-1} + h\,2x_i &= 2h^2(1+2+\dots+(i-1)) + 2h^2 i \\ &= 2h^2(1+2+\dots+(i-1)+i) \\ &= 2h^2 \frac{1+i}{2} i = h^2(i+1)\,i \\ &= (h(i+1))(hi) = x_{i+1} \cdot x_i \\ &= (x_i + h)\,x_i \end{aligned}$$

Luego $e^T_i = x_i^2 - (x_i+h)x_i = -x_i h$

Para $i = n \Rightarrow x_n = 1$, $y_n = (x_n+h)x_n = 1 + 1/n$

$e^T_n = -x_n h = -h = -1/n \Rightarrow$ DE 1º ORDEN

$\lim_{n\to\infty} e^T_n = 0 \rightarrow$ Se comprueba que el método converge.

Efectivamente, los resultados se comportan como predica la teoría.

2) Regla del Trapecio (*)

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x_i, y_i) \end{cases}$$

con $\phi(x_i, y_i) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_i, y_i) + \varphi(x_{i+1}, y_{i+1})\right)$

Luego: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{\cancel{2}}(\cancel{2}x_i + \cancel{2}x_{i+1}) = y_i + (i + (i+1))h^2$

No es implícito en este caso porque $\varphi(x, y)$ no depende de y

$$y_{i+1} = y_i + (2i+1)h^2$$

Error local de truncamiento

$$\tau_i(h) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \phi(x_i, y(x_i))$$

$$y(x) = x^2 \Rightarrow \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \frac{(x_i+h)^2 - x_i^2}{h} = 2x_i + h$$

$$\phi(x, y(x)) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x, y(x)) + \varphi(x+h, y(x+h))\right) = \frac{1}{2}\left(2x + 2(x+h)\right)$$

$$= 2x + h \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$\tau_i(h) = (2x_i + h) - (2x_i + h) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{CONSISTENTE} \\ \text{EXACTO} \end{cases}$$

(para este caso)

Error global de truncamiento

$$e_i^T = y(x_i) - y_i$$

$$y(x) = x^2 \Rightarrow y(x_i) = x_i^2$$

$$\left.\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + h\,\phi(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ \phi(x_{i-1}, y_{i-1}) &= \tfrac{1}{2}\left(\varphi(x_{i-1}, y_{i-1}) + \varphi(x_i, y_i)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(2x_{i-1} + 2x_i) = x_{i-1} + x_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_i = y_{i-1} + h(x_{i-1} + x_i)$$

(*) Para simplificar la notación escribimos y_i en lugar de $\hat{y}_i$

$y_0 = 0$

$y_1 = y_0 + h(x_0 + x_1) = h^2 \cdot 1$

$y_2 = y_1 + h(x_1 + x_2) = h^2 \cdot 1 + h^2(1+2) = h^2(1+1+2)$

$y_3 = y_2 + h(x_2 + x_3) = h^2(1+1+2) + h^2(2+3) = h^2(1+1+2+2+3)$

$y_4 = y_3 + h(x_3 + x_4) = h^2(1+1+2+2+3) + h^2(3+4) = h^2(1+1+2+2+3+3+4)$

...

$y_i = y_{i-1} + h(x_{i-1} + x_i) = h^2(1+1+2+2+ \_\_ + (i-2) + (i-2) + (i-1)) + h^2((i-1)+i)$

$= h^2(2(1+2+ \_\_ + (i-1)) + i)$

$= h^2(\cancel{2}\,\frac{1+(i-1)}{\cancel{2}}(i-1) + i)$

$= h^2(i(i-1) + i)$

$= h^2 i^2 = x_i^2$

Luego $e^T_i = x_i^2 - x_i^2 = 0$

Para $i = n \rightsquigarrow x_n = 1$, $y_n = 1$

$e^T_n = 0 \implies$ EXACTO

Se comprueba que en este caso el método proporciona la solución exacta.

En general este método será de segundo orden, por lo que

$\tau_i = O(h^2)$

Que en este caso proporcione la solución exacta se debe a la forma particular de $\varphi(x,y) = 2x$, y de $y(x) = x^2$, que son muy sencillas y sus derivadas de orden superior son nulas.

CN - 2023/2024 PR3 - 03

a) <u>Reescribimos la EDO como un sistema de 1º orden</u>

Definimos $\bar{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix}$

$m\ddot{y} + ky = 0 \Leftrightarrow \ddot{y} = -k/m \, y$

Luego $\dot{\bar{y}} = \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ -k/m \, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow \dot{\bar{y}} = \underbrace{\underset{\sim}{A} \bar{y}}_{\bar{\varphi}(x, \bar{y})}$ con $\bar{y} = \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$, $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix}$

b) <u>Método de Euler</u> (hacia delante) (*)

$y_0 = \begin{Bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}$, con $y_0 = y(t_0)$, $v_0 = \dot{y}(t_0)$

$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{\varphi}(x_i, \bar{y}_i) = \bar{y}_i + h\underset{\sim}{A}\bar{y}_i = (\underset{\sim}{I} + h\underset{\sim}{A})\bar{y}_i$

Luego $\boxed{\bar{y}_{i+1} = (\underset{\sim}{I} + h\underset{\sim}{A})\bar{y}_i} \Leftarrow$ 1º orden

<u>Método de Euler hacia atrás</u>

$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\,\bar{\varphi}(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) = \bar{y}_i + h\underset{\sim}{A}\bar{y}_{i+1}$

$\Rightarrow (\underset{\sim}{I} - h\underset{\sim}{A})\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i \Leftrightarrow \bar{y}_{i+1} = (\underset{\sim}{I} - h\underset{\sim}{A})^{-1}\bar{y}_i$

Luego $\boxed{\bar{y}_{i+1} = (\underset{\sim}{I} - h\underset{\sim}{A})^{-1}\bar{y}_i} \Leftarrow$ 1º orden

<u>Regla del trapecio</u>

$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h/2\left(\bar{\varphi}(x_i, \bar{y}_i) + \bar{\varphi}(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})\right) = \bar{y}_i + \frac{h}{2}\underset{\sim}{A}(\bar{y}_i + \bar{y}_{i+1})$

$\Rightarrow (\underset{\sim}{I} - h/2\,\underset{\sim}{A})\bar{y}_{i+1} = (\underset{\sim}{I} + h/2)\underset{\sim}{A}\,\bar{y}_i$

Luego $\boxed{\bar{y}_{i+1} = (\underset{\sim}{I} - h/2\,\underset{\sim}{A})^{-1}(\underset{\sim}{I} + h/2\,\underset{\sim}{A})\bar{y}_i} \Leftarrow$ 2º orden

(*) Para simplificar la notación escribimos y_i en lugar de $\bar{y}_i$

c) $\left\{\begin{array}{l} m\ddot{y} + k y = 0 \quad , \quad t \in (0, 1] \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = v_0 \end{array}\right\}$ con $k = 100$, $m = 1$

$y_0 = 1$, $v_0 = 0$

Solución exacta:

$$\ddot{y} = -k/m \, y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = A \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\, t) + B \cos(\sqrt{k/m}\, t) \\ \dot{y} = \sqrt{k/m}\left(A \cos(\sqrt{k/m}\, t) - B \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\, t)\right) \end{array}\right.$$

$$t = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = B = y_0 \\ \dot{y} = \sqrt{k/m} \cdot A = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{\sqrt{k/m}} v_0 \\ B = y_0 \end{array}\right.$$

Luego $y(x) = \frac{1}{\sqrt{k/m}} v_0 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\, t) + y_0 \cos(\sqrt{k/m}\, t)$

Con los datos que nos proporcionan:

$y(x) = \cos(10\, t)$ ← Solución analítica

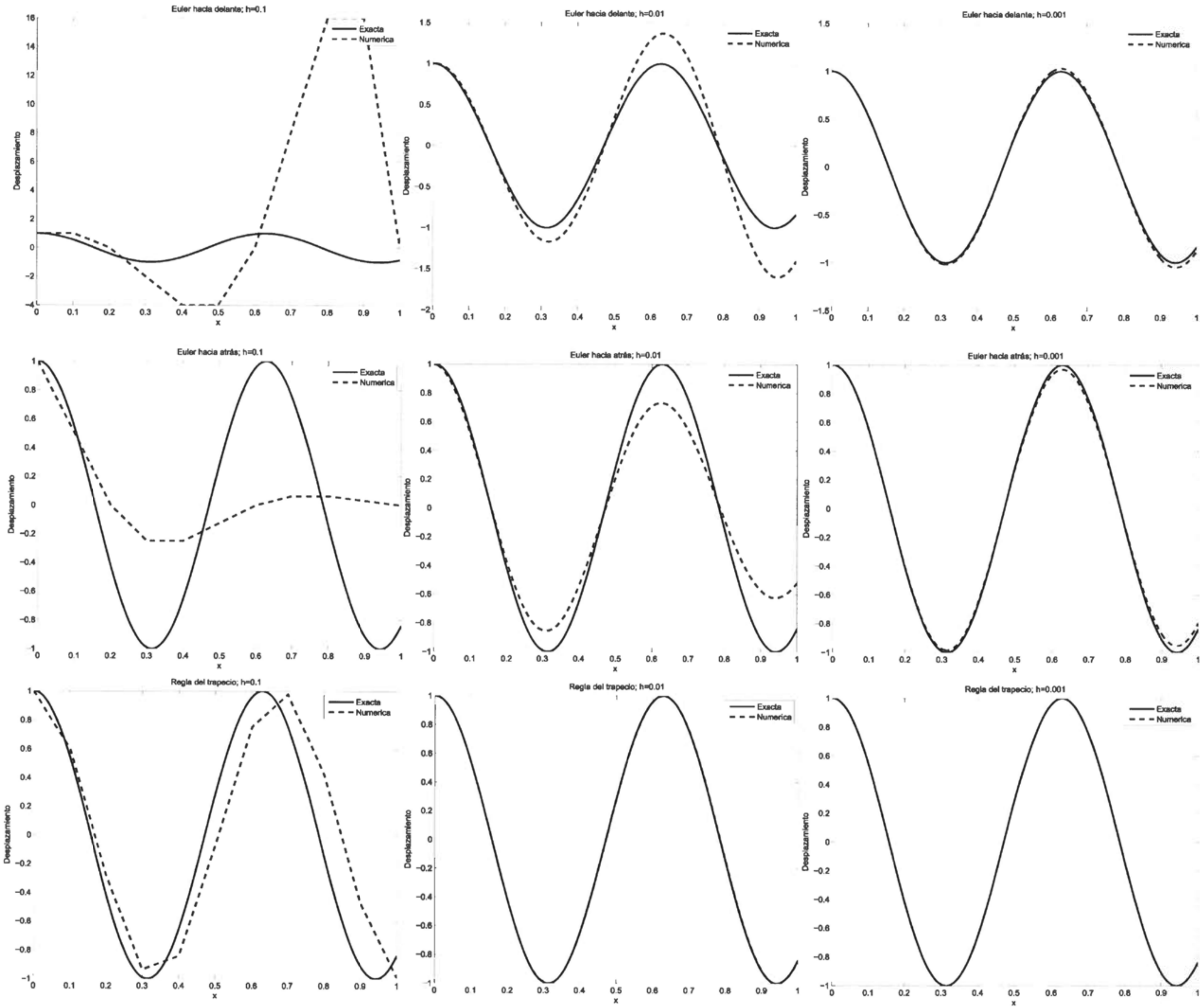
Numéricamente:

$$\bar{y} = \left\{\begin{array}{c} y \\ \dot{y} \end{array}\right\} \qquad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_0 = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{y}_{i+1} = \left(\underset{\sim}{I} + h \underset{\sim}{A}\right) \bar{y}_i & \leftarrow \text{Euler} \\ \bar{y}_{i+1} = \left(\underset{\sim}{I} - h \underset{\sim}{A}\right)^{-1} \bar{y}_i & \leftarrow \text{Euler hacia atrás} \\ \bar{y}_{i+1} = \left(\underset{\sim}{I} - h/_2 \underset{\sim}{A}\right)^{-1} \left(\underset{\sim}{I} + h/_2 \underset{\sim}{A}\right) \bar{y}_i & \leftarrow \text{Trapecio} \end{array}\right.$$

Véase el programa Fortran y los resultados impresos. Observamos que la regla del Trapecio es mucho más precisa, lo que es lógico ya que es de segundo orden.


Euler hacia delante; h=0.1
Euler hacia delante; h=0.01
Euler hacia delante; h=0.001
Euler hacia atrás; h=0.1
Euler hacia atrás; h=0.01
Euler hacia atrás; h=0.001
Regla del trapecio; h=0.1
Regla del trapecio; h=0.01
Regla del trapecio; h=0.001
Exacta
Numerica
Desplazamiento
x

03c

CN - 2023/2024 PR3 - 04

$$u'''' = 3(u')^2 + 9/_2\, u^3 \quad , \quad x \in [0,1)$$

con $u(1)=4,\ u'(1)=8,\ u''(1)=24,\ u'''(1)=96$

a) Conversión de la EDO en un sistema

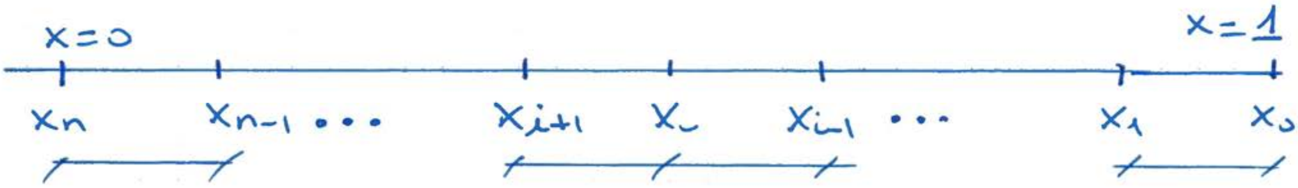
$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ u''' \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{u}' = \begin{Bmatrix} u' \\ u'' \\ u''' \\ u'''' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 3u_2^2 + 9/_2\, u_1^3 \end{Bmatrix}$$

Luego,

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \bar{\varphi}(x,\bar{u}) \ ; \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \ \bar{\varphi}(x,\bar{u}) = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ 3u_2^2 + 9/_2\, u_1^3 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}(1) = \bar{u}_0 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 8 \\ 24 \\ 96 \end{Bmatrix}$$

Métodos de Euler y Euler Modificado (*)



$h = -1/n \ ; \quad x_i = 1 + i\,h$

Euler : $\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + h\,\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1,i+1} = u_{1,i} + h\, u_{2,i} \\ u_{2,i+1} = u_{2,i} + h\, u_{3,i} \\ u_{3,i+1} = u_{3,i} + h\, u_{4,i} \\ u_{4,i+1} = u_{4,i} + h\, \left(3(u_{2,i})^2 + 9/_2\,(u_{1,i})^3\right) \end{cases}$$

(*) Para simplificar la notación escribimos u en lugar de $\hat{u}$

Euler Modificado: $\bar{u}_{i+1} = \bar{u}_i + h\,\bar{\varphi}\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{u}_i + \frac{h}{2}\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i)\right)$

$$\bar{u}_i + \frac{h}{2}\bar{\varphi}(x_i, \bar{u}_i) = \begin{Bmatrix} u_{1,i} + h/_2\, u_{2,i} \\ u_{2,i} + h/_2\, u_{3,i} \\ u_{3,i} + h/_2\, u_{4,i} \\ u_{4,i} + h/_2\left(3(u_{2,i})^2 + 9/_2(u_{1,i})^3\right) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{1,i+1} = u_{1,i} + h\left(u_{2,i} + h/_2\, u_{3,i}\right) \\ u_{2,i+1} = u_{2,i} + h\left(u_{3,i} + h/_2\, u_{4,i}\right) \\ u_{3,i+1} = u_{3,i} + h\left(u_{4,i} + h/_2\left(3(u_{2,i})^2 + 9/_2(u_{1,i})^3\right)\right) \\ u_{4,i+1} = u_{4,i} + h\left(3\left(u_{2,i} + h/_2\, u_{3,i}\right)^2 + 9/_2\left(u_{1,i} + h/_2\, u_{2,i}\right)^3\right) \end{cases}$$

b) Para avanzar desde $x_0 = 1$ hasta $x_2 = 0.8$ tomamos $h = -0.1$

Ver hoja excel y resultados impresos

c) Solución analítica:

$$u(x) = (1 - x/_2)^{-2} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (1 - x/_2)^{-3} \\ u''(x) = 3/_2(1 - x/_2)^{-4} \\ u'''(x) = 3(1 - x/_2)^{-5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u'''' = 15/_2(1 - x/_2)^{-6} = 3\left((1 - x/_2)^{-3}\right)^2 + \frac{9}{2}\left((1 - x/_2)^{-2}\right)^3 \Rightarrow \text{O.K.}$$

Ver hoja excel y resultados impresos.

Observamos que el Método de Euler Modificado es mucho más preciso, lo que es lógico ya que es de segundo orden, mientras que el Método de Euler es de primer orden.

h = -0.1

Solución exacta

	i	x_i	$u_{1,i}$	$u_{2,i}$	$u_{3,i}$	$u_{4,i}$
	0	1.000000000	4.000000000	8.000000000	24.000000000	96.000000000
	1	0.900000000	3.305785124	6.010518407	16.392322929	59.608447014
	2	0.800000000	2.777777778	4.629629630	11.574074074	38.580246914

Método de EULER

	i	x_i	$u_{1,i}$	$u_{2,i}$	$u_{3,i}$	$u_{4,i}$
	0	1.000000000	4.000000000	8.000000000	24.000000000	96.000000000
	1	0.900000000	3.200000000	5.600000000	14.400000000	48.000000000
	2	0.800000000	2.640000000	4.160000000	9.600000000	23.846400000
Error final			4.96%	10.14%	17.06%	38.19%

Método de EULER MODIFICADO

h = -0.1

	i	x_i	$u_{1,i}$	$u_{2,i}$	$u_{3,i}$	$u_{4,i}$
	0	1.000000000	4.000000000	8.000000000	24.000000000	96.000000000
	1	0.900000000	3.320000000	6.080000000	16.800000000	61.132800000
	2	0.800000000	2.796000000	4.705664000	12.064589280	40.550081357
Error final			-0.66%	-1.64%	-4.24%	-5.11%

04c

CN - 2023/2024 PR3 - 05

$$\begin{cases} \dfrac{d^4 v}{dx^4} = \dfrac{1}{EI} p & ; \ x \in (0, L) \\ v(0) = 0, \ v'(0) = 0, \ v''(0) = \dfrac{pL^2}{2EI}, \ v'''(0) = -\dfrac{pL}{EI} \end{cases}$$

Conversión de la EDO en un sistema

$$\bar{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{v}' = \begin{Bmatrix} v' \\ v'' \\ v''' \\ v'''' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ p/EI \end{Bmatrix}$$

luego:

$$\frac{d\bar{v}}{dx} = \bar{\varphi}(x, \bar{v}) \ ; \ \bar{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}, \ \bar{\varphi}(x, \bar{v}) = \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ p/EI \end{Bmatrix}$$

$$\bar{v}(0) = \bar{v}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ pL^2/2EI \\ -pL/EI \end{Bmatrix} = \frac{p}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^2/2 \\ -L \end{Bmatrix}$$

Método de Heun de 2º orden

$$\bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + h\,\bar{\phi}(x_i, \bar{v}_i) \quad ; \quad x_{i+1} = x_i + h$$

$$\bar{\phi}(x_i, \bar{v}_i) = \tfrac{1}{2} \bar{k}_{0,i} + \tfrac{1}{2} \bar{k}_{1,i}$$

$$\begin{cases} \bar{k}_{0,i} = \bar{\varphi}(x_i, \bar{v}_i) \\ \bar{k}_{1,i} = \bar{\varphi}(x_i + h, \bar{v}_i + h\,\bar{k}_{0,i}) \end{cases}$$

Un intervalo $\Rightarrow h = L$

$$\left.\begin{matrix} x_0 = 0 \\ \bar{v}_0 = \dfrac{p}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^2/2 \\ -L \end{Bmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = L \\ \bar{v}_1 = \bar{v}_0 + L\,\bar{\phi}(x_0, \bar{v}_0) \\ \quad \bar{\phi}(x_0, \bar{v}_0) = \tfrac{1}{2} \bar{k}_{0,0} + \tfrac{1}{2} \bar{k}_{1,0} \\ \quad \bar{k}_{0,0} = \bar{\varphi}(x_0, \bar{v}_0) \\ \quad \bar{k}_{1,0} = \bar{\varphi}(x_1, \bar{v}_0 + L\,\bar{k}_{0,0}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{K}_{0,0} = \frac{P}{EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ L^2/2 \\ -L \\ 1 \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \bar{v}_0 + L\,\bar{K}_{0,0} = \frac{P}{EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ L^3/2 \\ -L^2/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \bar{K}_{1,0} = \frac{P}{EI}\begin{Bmatrix} L^3/2 \\ -L^2/2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

$$\bar{v}_1 = \frac{P}{EI}\begin{Bmatrix} L^4/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_1 = \dfrac{PL^4}{4EI} \\ v(L) = \dfrac{PL^4}{8EI} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{error} = -100\%$$

Método de Kutta de 4º orden

$$\bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + h\,\bar{\Phi}(x_i, \bar{v}_i) \quad ; \quad x_{i+1} = x_i + h$$

$$\bar{\Phi}(x_i, \bar{v}_i) = 1/6\,\bar{K}_{0,i} + 1/3\,\bar{K}_{1,i} + 1/3\,\bar{K}_{2,i} + 1/6\,\bar{K}_{3,i}$$

$$\begin{cases} \bar{K}_{0,i} = \bar{\varphi}(x_i, \bar{v}_i) \\ \bar{K}_{1,i} = \bar{\varphi}(x_i + h/2, \bar{v}_i + h/2\,\bar{K}_{0,i}) \\ \bar{K}_{2,i} = \bar{\varphi}(x_i + h/2, \bar{v}_i + h/2\,\bar{K}_{1,i}) \\ \bar{K}_{3,i} = \bar{\varphi}(x_i + h, \bar{v}_i + h\,\bar{K}_{2,i}) \end{cases}$$

Un intervalo $\Rightarrow h = L$

$x_0 = 0$

$$\bar{v}_0 = \frac{P}{EI}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L^2/2 \\ -L \end{Bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 = L \\ \bar{v}_1 = \bar{v}_0 + L\,\bar{\Phi}(x_0, \bar{v}_0) \end{array}$$

$$\bar{\Phi}(x_0, \bar{v}_0) = 1/6\,\bar{K}_{0,0} + 1/3\,\bar{K}_{1,0} + 1/3\,\bar{K}_{2,0} + 1/6\,\bar{K}_{3,0}$$

$$\begin{cases} \bar{K}_{0,0} = \bar{\varphi}(x_0, \bar{v}_0) \\ \bar{K}_{1,0} = \bar{\varphi}(x_0 + L/2, \bar{v}_0 + L/2\,\bar{K}_{0,0}) \\ \bar{K}_{2,0} = \bar{\varphi}(x_0 + L/2, \bar{v}_0 + L/2\,\bar{K}_{1,0}) \\ \bar{K}_{3,0} = \bar{\varphi}(x_0 + L, \bar{v}_0 + L\,\bar{K}_{2,0}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\bar{K}_{0,0} = \dfrac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L^2/2 \\ -L \\ 1 \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \bar{V}_0 + L/2\, \bar{K}_{0,0} = \dfrac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L^3/4 \\ 0 \\ -L/2 \end{matrix}\right\} \\[2ex]
\bar{K}_{1,0} = \dfrac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} L^3/4 \\ 0 \\ -L/2 \\ 1 \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \bar{V}_0 + L/2\, \bar{K}_{1,0} = \dfrac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} L^4/8 \\ 0 \\ L^2/4 \\ -L/2 \end{matrix}\right\} \\[2ex]
\bar{K}_{2,0} = \dfrac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L^2/4 \\ -L/2 \\ 1 \end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \bar{V}_0 + L\, \bar{K}_{2,0} = \dfrac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} 0 \\ L^3/4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} \\[2ex]
\bar{K}_{3,0} = \dfrac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} L^3/4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}
\end{array}\right.$$

$$\bar{V}_1 = \frac{p}{EI}\left\{\begin{matrix} L^4/8 \\ L^3/6 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1 = pL^4/8EI \\ V(L) = pL^4/8EI \end{array}\right\} \Rightarrow \text{error} = 0\,\%$$

<u>Solución exacta</u>

$$V'''' = \frac{p}{EI} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{24}\frac{p}{EI}\left(x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}
v(0) = 0 \Rightarrow D = 0 \\
v'(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \\
v''(0) = \dfrac{pL^2}{2EI} \Rightarrow B = 6L^2 \\
v'''(0) = -\dfrac{pL}{EI} \Rightarrow A = -4L
\end{array}\right\} \Rightarrow V(x) = \frac{p}{24EI}\left(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2\right)$$

$$\Rightarrow V(L) = \frac{pL^4}{8EI}$$

El Método de Kutta proporciona la solución exacta porque es de 4º orden, y la solución exacta en este caso es un polinomio de grado 4.

CN - 2023/2024 PR3 - 06

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \varphi(x,y) \quad \text{con } \varphi(x,y) = 2y^2 - 6y\sqrt{x}, \quad x \in (0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

<u>Predictor $k=3,\ r=3$</u>, $\tau(h^4)$

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}\left(2\varphi_i - \varphi_{i-1} + 2\varphi_{i-2}\right)$$

<u>Corrector $k=0,\ r=3$</u>, $\tau(h^4)$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9\varphi_{i+1} + 19\varphi_i - 5\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right)$$

donde $\varphi_i = \varphi(x_i, y_i)$

<u>Planteamiento</u>

$$h = \frac{1}{n} \rightarrow \begin{cases} x_i = i \cdot h \quad ; i = 0, \ldots, n \\ y_i \simeq y(x_i) \end{cases}$$

Para arrancar el predictor-corrector necesitamos las aproximaciones y_0, y_1, y_2, y_3

Sabemos que $y_0 = 1$. Calcularemos y_1, y_2, y_3 mediante un método de paso simple (Runge-Kutta, por ejemplo), del mismo orden que el predictor-corrector (4º, en este caso)

A continuación:

```
do i = 3, n
   y_{i+1}^0 = y_{i-3} + (4h/3) (2φ_i - φ_{i-1} + 2φ_{i-2})        → PREDICCIÓN
   do k = 0, kmax   [hasta convergencia]
      y_{i+1}^{k+1} = y_i + (h/24) (9φ(x_{i+1}, y_{i+1}^k) + 19φ_i - 5φ_{i-1} + φ_{i-2})
                                                 ↳ CORRECCIÓN ITERATIVA (A.S.)
   enddo
enddo
```

a) La corrección iterativa equivale a resolver la ecuación

$$z = F(z), \text{ con } F(z) = y_i + \frac{h}{24}\left(9\varphi(x_{i+1}, z) + 19\varphi_i - 5\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right)$$

mediante el método de aproximaciones sucesivas

$$\begin{cases} z^0 = y_{i+1}^0 & \leftarrow \text{aproximación inicial (PREDICCIÓN)} \\ z^{k+1} = F(z^k), \; k = 0, 1, \ldots & \leftarrow \text{(CORRECCIÓN)} \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{9h}{24}\varphi(x_{i+1}, z) + C_i$$

con $C_i = y_i + \frac{h}{24}\left(19\varphi_i - 5\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right) = \text{cte.}$

$$\varphi(x, y) = 2y^2 - 6y\sqrt{x}$$

Para que la corrección iterativa sea convergente debe cumplirse

$$\left.\begin{array}{l} |F'(y_{i+1})| < 1, \text{ siendo } y_{i+1} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{i+1}^{k+1} \\ F'(z) = \frac{9h}{24}\left(4z - 6\sqrt{x_{i+1}}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{9h}{24}\left|4y_{i+1} - 6\sqrt{x_{i+1}}\right| < 1 \quad \text{para } i = 3, \ldots, n}$$

Sabemos que $\left\{\begin{array}{l} x \in (0, 1] \\ y(x) \in (0, 1.5) \end{array}\right\}$, luego los casos más

desfavorables son

$$\left.\begin{cases} x_{i+1} = 1, \; y_{i+1} = 0 \Rightarrow \frac{9h}{24} \cdot 6 < 1 \\ x_{i+1} = 0, \; y_{i+1} = 1.5 \Rightarrow \frac{9h}{24}\, 6 < 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow h < 4/9$$

Por tanto, para que la corrección iterativa sea convergente debe cumplirse $h < 4/9$.

En estas condiciones, la corrección convergerá si el valor proporcionado por el predictor está suficientemente cerca del resultado.

b) La corrección iterativa será, en general, un método de 1º orden (por tratarse de un método de aproximaciones sucesivas)

Planteamos la solución de $z = F(z)$ por el método de Newton para tener convergencia de 2º orden.

$f(z) = z - F(z) = 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} z^0 = y_{i+1}^0 \\ z^{k+1} = z^k - \dfrac{f(z^k)}{f'(z^k)} \quad ; \; k = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

donde
$$\begin{cases} f(z) = z - F(z) = z - \left[\frac{9h}{24} \varphi(x_{i+1}, z) + c_i \right] \\ \qquad = z - \frac{9h}{24}\left(2z^2 - 6z\sqrt{x_{i+1}}\right) - c_i \\ f'(z) = 1 - F'(z) = 1 - \frac{9h}{24}\left(4z - 6\sqrt{x_{i+1}}\right) \end{cases}$$

Luego

```
do i = 3, n
    y_{i+1}^0 = y_{i-3} + 4h/3 (2φ_i - φ_{i-1} + 2φ_{i-2})      → PREDICCIÓN
    do k = 0, kmax [hasta convergencia]
        y_{i+1}^{k+1} = y_{i+1}^k - [y_{i+1}^k - 9h/24 (2(y_{i+1}^k)^2 - 6 y_{i+1}^k √x_{i+1}) - c_i] / [1 - 9h/24 (4 y_{i+1}^k - 6 √x_{i+1})]
    enddo
enddo
```

→ CORRECCIÓN ITERATIVA (NEWTON)