CÁLCULO NUMÉRICO — Curso 2023–2024, PRÁCTICA 3

EDOs (Fecha de entrega **del problema 7**: 16/04/2024)

1.– Considérese el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad x \in (0,1),$$
$$y(0) = 0,$$

cuya solución exacta es $y(x) = x^2$. Supongamos que se discretiza el dominio en n subintervalos usando los puntos $x_i = i/n$ con $i = 0, \ldots, n$.

Se pide:

a) Plantear y desarrollar completamente la aplicación del método de Euler hacia delante.
b) Utilizando el hecho de que la solución exacta es $y(x) = x^2$, calcular el error local de truncamiento en un punto genérico $x = x_i$ en función de n.
c) Calcular el error global de truncamiento en el punto $x = 1$ en función de n.
d) ¿Coinciden los resultados obtenidos con los esperados?

2.– Repetir el problema anterior usando el método de Euler hacia atrás y la regla del trapecio.

3.– Considérese un sistema masa-resorte no amortiguado. En primera aproximación, la posición del sistema como función del tiempo $y(t)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

donde m representa la masa del sistema y k denota la constante del resorte.

Se pide:

a) Rescribir la EDO de segundo orden como un sistema de EDOs de primer orden.
b) Plantear la resolución numérica del sistema de primer orden por el método de Euler hacia delante, el método de Euler hacia atrás y la regla del trapecio.
c) Realizar un programa de ordenador que calcule las soluciones numéricas por los tres métodos anteriores en el intervalo $t \in [0,1]$ para $k = 100$ y $m = 1$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$. El dominio se discretizará utilizando subintervalos de tamaño 0.1, 0.01 y 0.001. Comentar los resultados y compararlos con la solución exacta $y(t) = y(0)\cos(\sqrt{k/m}\, t)$.

4.– Se desea resolver mediante un método de intervalo simple la ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden

$$u'''' = 3(u')^2 + \frac{9}{2}u^3, \qquad x \in [0,1],$$

con las condiciones de contorno

$$u(1) = 4, \qquad u'(1) = 8, \qquad u''(1) = 24, \qquad u'''(1) = 96.$$

Se pide:

a) Plantear y desarrollar completamente la aplicación del método de Euler, y del método de Euler modificado, explicitando cómo se reduce el orden de la EDO y cómo se realizan los cálculos en ambos casos.

b) Utilizando estos dos métodos, calcular los valores de u, u', u'' y u''' en $x = 0.8$ avanzando desde $x = 1$ en dos pasos.

c) Analizar los resultados obtenidos, comparándolos entre sí y con los que proporciona la solución analítica $u(x) = (1 - x/2)^{-2}$.

5.– La ecuación diferencial que rige el comportamiento a flexión de una viga de directriz recta e inercia constante es:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{1}{EI}p(x)$$

siendo $v(x)$ y $p(x)$ el desplazamiento y la carga repartida aplicada, respectivamente, en la dirección del eje y.

El momento flector $M(x)$ y el cortante $Q(x)$ pueden escribirse en la forma:

$$M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2}; \qquad Q(x) = -EI\frac{d^3v}{dx^3}$$

Para el caso de una viga empotrada en un extremo ($x = 0$) y libre en el otro ($x = L$), las condiciones de contorno son:

$$v(0) = 0; \qquad v'(0) = 0; \qquad v''(L) = 0; \qquad v'''(L) = 0$$

y por tanto no se trata de un problema de valor inicial.

No obstante para el caso en que la carga es constante por unidad de longitud ($p(x) = p$) es sencillo calcular el momento y el cortante en el empotramiento, y puede plantearse un problema de valor inicial con las condiciones:

$$v(0) = 0; \qquad v'(0) = 0; \qquad v''(0) = \frac{1}{EI}\frac{pL^2}{2}; \qquad v'''(0) = -\frac{1}{EI}pL$$

Para este caso, calcular el desplazamiento en el extremo libre en función de P, EI y L aplicando los métodos de Runge-Kutta siguientes: a) Heun de segundo orden, y b) Kutta de cuarto orden, y el error relativo que se comete en cada caso respecto a la solución exacta ($v(L) = \frac{pL^4}{8EI}$). Efectuar los cálculos con UN SÓLO INTERVALO ($\Delta x = L$) ¿En alguno de los casos anteriores se obtiene la solución exacta? ¿Por qué?

6.– Para resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2y^2 - 6y\sqrt{x}, \qquad y(0) = 1, \qquad 0 < x \leq 1$$

se propone un método predictor–corrector, utilizando como fórmula predictora la correspondiente a $k = 3, r = 3$, y como fórmula correctora la correspondiente a $k = 0, r = 3$.

Se pide:

a) Sabiendo que $0 < y(x) < 1.5$, calcular el máximo valor de h que garantiza que la corrección es convergente.

b) Plantear la solución de la ecuación correctora mediante el método de Newton.

7.– [PROBLEMA QUE SE ENTREGARÁ RESUELTO]

Se desea resolver la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden

$$u''' = -3uu'', \qquad x \in [-1, 1],$$

con las condiciones de contorno

$$u(-1) = 1, \qquad u'(-1) = -1, \qquad u''(-1) = 2,$$

mediante un método de intervalo simple. Se pide:

a) Plantear y desarrollar completamente la aplicación del método de Euler, y del método de Euler modificado, explicitando cómo se reduce el orden de la EDO y cómo se realizan los cálculos en ambos casos.

b) Utilizando estos dos métodos, calcular los valores de u, u' y u'' en $x = 0$ avanzando desde $x = -1$ en dos pasos.

c) Comparar los resultados obtenidos entre sí, y con los que proporciona la solución analítica

$$u(x) = (2 + x)^{-1}.$$