

$$a) I = \int_1^2 \ln(x) dx = x \ln(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ = (x \ln(x) - x) \Big|_1^2 = 2 \ln(2) - 1 \approx 0.386294361$$

b) Newton-Cotes de 3 puntos  $\Rightarrow n=2$  (cerrado)  
 $I = I_2 + E_2$ ,  $h = \frac{2-1}{2} = 1/2$ ,  $x_0=1$ ,  $x_1=1.5$ ,  $x_2=2$   
 $I_2 = h/3 ((f_0 + f_2) + 4f_1) \approx 0.385834602$

Newton-Cotes de 4 puntos  $\Rightarrow n=3$  (cerrado)

$$I = I_3 + E_3, h = \frac{2-1}{3} = 1/3, x_0=1, x_1=4/3, x_2=5/3, x_3=2$$

$$I_3 = \frac{3h}{8} ((f_0 + f_3) + 3(f_1 + f_2)) \approx 0.386083784$$

c) Newton-Cotes de 3 puntos

$$E_2 = I - I_2 \approx 0.000459759 \quad (\sim 0.12\%)$$

$$E_2 = \left. \begin{array}{l} -1/90 h^5 4^{(4)}(\xi) \\ 4^{(4)}(x) = -6/x^4 \end{array} \right\} \Rightarrow E_2 = \frac{6}{90} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{5^4} \left. \vphantom{\frac{6}{90}} \right\} \Rightarrow \\ \xi \in [1, 2]$$

$$|E_2| \leq \frac{6}{90} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{14} \approx 0.002083333 \quad (\sim 0.54\%)$$

Newton-Cotes de 4 puntos

$$E_3 = I - I_3 \approx 0.000210577 \quad (\sim 0.05\%)$$

$$E_3 = \left. \begin{array}{l} -3/80 h^5 4^{(4)}(\xi) \\ 4^{(4)}(x) = -6/x^4 \end{array} \right\} \Rightarrow E_3 = \frac{3 \cdot 6}{80} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \frac{1}{5^4} \left. \vphantom{\frac{3 \cdot 6}{80}} \right\} \Rightarrow \\ \xi \in [1, 2]$$

$$|E_3| \leq \frac{18}{80} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{14} \approx 0.000925926 \quad (\sim 0.24\%)$$

d) Los resultados son razonablemente buenos y la precisión es similar (los errores son del mismo orden de magnitud). Las cotes de error son conservadoras (del orden de 5 veces el error que realmente se produce).

$$\begin{aligned}
 e) \quad I &= \int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( x \ln(x) \Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x \cdot 1}{x^2} dx \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( (x \ln(x) - x) \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( -1 + \varepsilon \ln(\varepsilon) - \varepsilon \right) = -1
 \end{aligned}$$

b) Newton-Cotes de 3 puntos  $\Rightarrow n=2$  (abierto \*)

$$I = I_2 + E_2, \quad h = \frac{1-0}{2+2} = 1/4, \quad x_0 = 1/4, \quad x_1 = 2/4, \quad x_2 = 3/4$$

$$I_2 = \frac{4h}{3} (2(t_0+t_2) - t_1) \simeq -0.884935229$$

Newton-Cotes de 4 puntos  $\Rightarrow n=3$  (abierto \*)

$$I = I_3 + E_3, \quad h = \frac{1-0}{3+2} = 1/5, \quad x_0 = 1/5, \quad x_1 = 2/5, \quad x_2 = 3/5, \quad x_3 = 4/5$$

$$I_3 = \frac{5h}{24} (11(t_0+t_3) + (t_1+t_2)) \simeq -0.899396352$$

c) Newton-Cotes de 3 puntos

$$E_2 = I - I_2 \simeq -0.115069771 \quad (\sim 11,51\%)$$

$$\left. \begin{aligned}
 E_2 &= \frac{28}{90} h^5 t^{(4)}(s) \\
 t^{(4)}(x) &= -6/x^4
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_2 = -\frac{28 \cdot 6}{90} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \frac{1}{5^4} \Rightarrow$$

$|E_2| \leq \infty \Rightarrow$  no se puede acotar el error

Newton-Cotes de 4 puntos

$$E_3 = I - I_3 \simeq -0.100603648 \quad (\sim 10.06\%)$$

$$\left. \begin{aligned}
 E_3 &= \frac{95}{144} h^5 t^{(4)}(s) \\
 t^{(4)}(x) &= -6/x^4
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_3 = -\frac{95 \cdot 6}{144} \left(\frac{1}{5}\right)^5 \frac{1}{5^4} \Rightarrow$$

$|E_3| \leq \infty \Rightarrow$  no se puede acotar el error

d) Los resultados son mucho peores y la precisión es incierta al no existir cota superior del error

(\*) No se pueden utilizar fórmulas cerradas, pues  $t(x_0) = -\infty$



a)  $I = \int_1^2 \ln(x) dx \approx 0.386294361$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = I_2 + E_2, \quad E_2 = -1/90 (1/2)^5 4^{(4)}(S_2) \\ I = I_3 + E_3, \quad E_3 = -3/80 (1/3)^5 4^{(4)}(S_3) \end{array} \right\}$$

Hipótesis:  $4^{(4)}(S_2) \approx 4^{(4)}(S_3) \Rightarrow E_2/E_3 \approx \frac{1/90 (1/2)^5}{3/80 (1/3)^5} = K$

luego,  $\left. \begin{array}{l} I_2 + E_2 = I_3 + E_3 \\ E_2/E_3 \approx K \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_2 \approx \frac{K}{K-1} (I_3 - I_2) \\ E_3 \approx \frac{1}{K-1} (I_3 - I_2) \end{array} \right\}$

$\rightarrow I \approx \hat{I} = \frac{KI_3 - I_2}{K-1}$

$K = 2.25 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_2 \approx 0.000448527 \quad (\sim 0.12\%) \\ E_3 \approx 0.000199345 \quad (\sim 0.05\%) \\ \hat{I} \approx 0.386283129 \rightarrow E = I - \hat{I} \approx 0.000011232 \quad (\sim 0.003\%) \end{array} \right.$

b)  $I = \int_0^1 \ln(x) dx = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = I_2 + E_2, \quad E_2 = 23/90 (1/4)^5 4^{(4)}(S_2) \\ I = I_3 + E_3, \quad E_3 = 95/144 (1/5)^5 4^{(4)}(S_3) \end{array} \right\}$$

Hipótesis:  $4^{(4)}(S_2) \approx 4^{(4)}(S_3) \Rightarrow E_2/E_3 \approx \frac{23/90 (1/4)^5}{95/144 (1/5)^5} = K$

luego,  $\left. \begin{array}{l} I_2 + E_2 = I_3 + E_3 \\ E_2/E_3 \approx K \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_2 \approx \frac{K}{K-1} (I_3 - I_2) \\ E_3 \approx \frac{1}{K-1} (I_3 - I_2) \end{array} \right\}$

$\rightarrow I \approx \hat{I} = \frac{KI_3 - I_2}{K-1}$

$K \approx 1.439144737 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_2 \approx -0.047391322 \quad (\sim 4.74\%) \\ E_3 \approx -0.032930199 \quad (\sim 3.29\%) \\ \hat{I} \approx -0.932326551 \rightarrow E = I - \hat{I} \approx -0.067673449 \quad (\sim 6.77\%) \end{array} \right.$

c)  $4^{(4)}(x) = -6/x^4$  varía entre  $\left. \begin{array}{l} -6 \text{ y } -0.375 \text{ para } x \in [1, 2] \\ -\infty \text{ y } -6 \text{ para } x \in [0, 1] \end{array} \right\}$   
 Por eso el primer caso funciona mucho mejor que el segundo

a) Newton-Cotes de 7 puntos  $\Rightarrow n = 6$  (cuerda)

$$I = I_6^{NC} + E_6^{NC}, \quad h = \frac{2-1}{6} = 1/6, \quad x_0 = 1, x_1 = 7/6, x_2 = 8/6, \\ x_3 = 9/6, x_4 = 10/6, x_5 = 11/6, x_6 = 2$$

$$I_6^{NC} = \frac{h}{140} (41(t_0 + t_6) + 216(t_1 + t_5) + 27(t_2 + t_4) + 272t_3)$$

$$\approx 0,386294205$$

$$E_6^{NC} = I - I_6^{NC} \approx 0.000000156 \quad (\sim 0.000040 \%)$$

$$E_6^{NC} = \frac{-9}{1400} h^9 t^{(8)}(s) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow E_6^{NC} = \frac{9 \cdot 5040}{1400} \left(\frac{1}{6}\right)^9 \frac{1}{5^8} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \\ t^{(8)}(x) = -5040/x^8 \quad s \in [1, 2]$$

$$|E_6^{NC}| \leq \frac{9 \cdot 5040}{1400} \left(\frac{1}{6}\right)^9 \frac{1}{18} \approx 0.00003215 \quad (\sim 0.000832 \%)$$

b) Simpson-Compuesta con 7 puntos  $\Rightarrow n = 3$

$$I = I_6^{SC} + E_6^{SC}, \quad h = \frac{2-1}{2 \cdot 3} = 1/6, \quad x_0 = 1, x_1 = 7/6, x_2 = 8/6, \\ x_3 = 9/6, x_4 = 10/6, x_5 = 11/6, x_6 = 2$$

$$I_6^{SC} = \frac{h}{3} (t_0 + 4t_1 + 2t_2 + 4t_3 + 2t_4 + 4t_5 + t_6)$$

$$\approx 0.386287163$$

$$E_6^{SC} = I - I_6^{SC} \approx 0.000007198 \quad (\sim 0.001863 \%)$$

$$E_6^{SC} = -\frac{1}{180} \frac{(2-1)^5}{(2 \cdot 3)^4} t^{(4)}(s) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow E_6^{SC} = \frac{6}{180} \frac{1}{6^4} \frac{1}{5^4} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \\ t^{(4)}(s) = -6/x^4 \quad s \in [1, 2]$$

$$|E_6^{SC}| \leq \frac{6}{180 \cdot 6^4} \approx 0.000025720 \quad (\sim 0.006658 \%)$$

c) los resultados son muy buenos y la precisión es similar. Lo método de Simpson compuesto es más conveniente porque permite aumentar arbitrariamente el número de puntos (y la precisión)



a) Newton-Cotes de 7 puntos  $\Rightarrow n=6$  (abierto  $*$ )

$$I = I_6^{NC} + E_6^{NC}, \quad h = \frac{1-0}{6+2} = 1/8, \quad x_0 = 1/8, x_1 = 2/8, x_2 = 3/8,$$

$$x_3 = 4/8, x_4 = 5/8, x_5 = 6/8, x_6 = 7/8$$

$$I_6^{NC} = \frac{8h}{945} (460(t_0+t_6) - 954(t_1+t_5) + 2196(t_2+t_4) - 2459t_3)$$

$$\approx -0.955104894$$

$$E_6^{NC} = I - I_6^{NC} \approx -0.044895106 \quad (\sim 4,49 \%)$$

$$E_6^{NC} = \frac{3956}{14175} h^9 t^{(8)}(\xi) \quad \left\{ \Rightarrow E_6^{NC} = \frac{-3956 \cdot 5040}{14175} \left(\frac{1}{8}\right)^9 \frac{1}{5^8} \right\} \Rightarrow$$

$$t^{(8)}(x) = -5040/x^8 \quad S \in [0,1]$$

$|E_6^{NC}| \leq \infty \Rightarrow$  no se puede acotar el error

b) transformación  $z = -\ln(x)$   $\triangleright$  GAUSS

$$I = \int_0^1 \ln(x) dx \quad \left\{ \Rightarrow I = \int_{-\infty}^0 z e^z dz = \int_0^{\infty} \underbrace{(-z)}_{t(z)} e^{-z} dz \right.$$

$$z = -\ln(x) \rightarrow dz = -1/x dx \quad | \quad x = e^{-z}$$

$(-z)$  es un polinomio de grado 1 en  $z$ , partiendo con la cuadratura de Gauss-Laguerre con  $n=0$  (un punto) obtenemos:

$$I = I_0^{GL} + E_0^{GL}, \quad z_0 = 1, \quad w_0 = 1$$

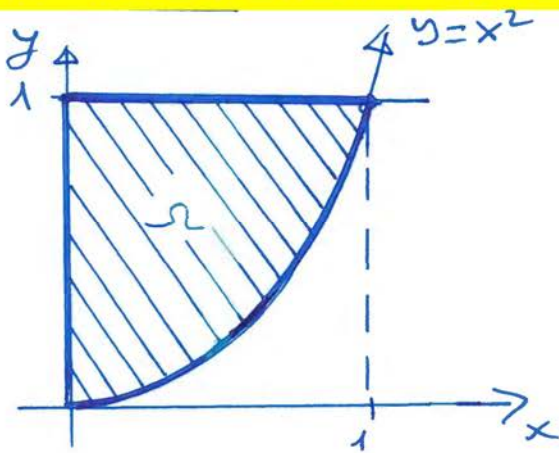
$$I_0^{GL} = w_0 t(z) = -1$$

$$E_0^{GL} = k_0 t^{(2)}(\xi) \quad \left\{ \Rightarrow E_0^{GL} = 0 \Rightarrow \text{SOLUCIÓN EXACTA} \right.$$

$$t^{(2)}(z) = 0$$

c) El resultado obtenido mediante la fórmula de Newton-Cotes es malo y la precisión incierta el no existir esta superior del error. Con la transformación y la cuadratura de Gauss-Laguerre el resultado es exacto.

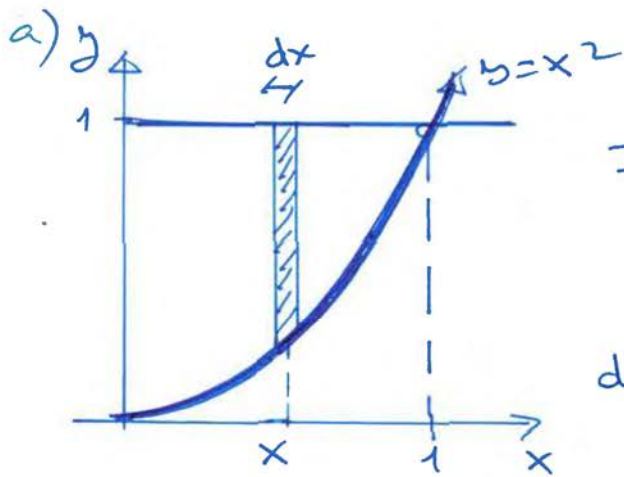
$*$ ) No se pueden utilizar fórmulas cerradas, pues  $t(x_0) = -\infty$



$$I = \iint_R f(x,y) d\Omega$$

$$f(x,y) = x^3 + y$$

de integral se puede plantear de 2 formas:

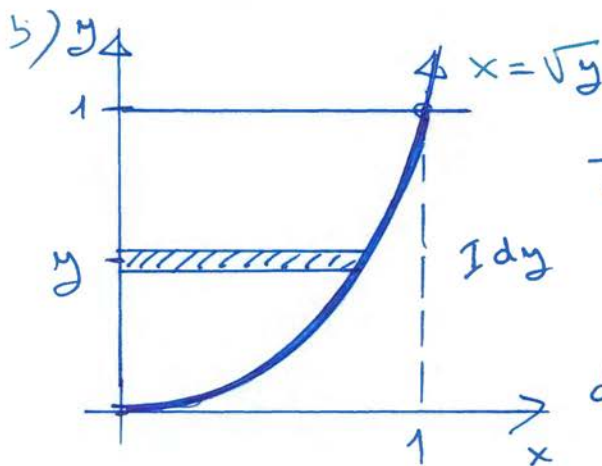


$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left[ \int_{y=x^2}^{y=1} f(x,y) dy \right] dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{g(x)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{P_5(x)}$

donde

$$g(x) = \int_{y=x^2}^{y=1} (x^3 + y) dy = -x^5 - x^4/2 + x^3 + 1/2$$



$$I = \int_{y=0}^{y=1} \left[ \int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} f(x,y) dx \right] dy$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{h(y)}$

donde

$$h(y) = \int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} (x^3 + y) dx = \frac{y^3}{12} + \frac{2}{5} y^{5/2}$$

En los dos casos se obtiene el mismo resultado:

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \int_{x=0}^{x=1} g(x) dx = 29/60 \\ I = \int_{y=0}^{y=1} h(y) dy = 29/60 \end{array} \right.$$

Caso a)

06b

$$I = \int_{x=0}^{x=1} g(x) dx \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(1+s) \\ dx = \frac{1}{2} ds \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_{s=-1}^{s=1} g\left(\frac{1}{2}(1+s)\right) \frac{1}{2} ds$$

Gauss-Legendre con 4 punts en  $x \rightarrow n=3$

$$I = \sum_{i=0}^3 w_i^x g(\underbrace{\frac{1}{2}(1+s_i)}_{x_i}) \frac{1}{2} + \epsilon_3^x$$

donde :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0 = -0.86113631159405, \quad w_0^x = 0.34785484513745 \\ s_1 = -0.33998104358486, \quad w_1^x = 0.65214515486255 \\ s_2 = -s_1, \quad w_2^x = w_1^x \\ s_3 = -s_0, \quad w_3^x = w_0^x \end{array} \right.$$

A su vez,

$$g(x_i) = \int_{\eta=x_i^L}^{\eta=1} f(x_i, \eta) d\eta \quad \left. \begin{array}{l} \eta = \left(\frac{1+x_i^L}{2}\right) + \left(\frac{1-x_i^L}{2}\right)\eta \\ d\eta = \left(\frac{1-x_i^L}{2}\right)d\eta \end{array} \right\} \Rightarrow g(x_i) = \int_{\eta=1}^{\eta=1} f\left(x_i, \left(\frac{1+x_i^L}{2}\right) + \left(\frac{1-x_i^L}{2}\right)\eta\right) \left(\frac{1-x_i^L}{2}\right) d\eta$$

Gauss-Legendre con 2 punts en  $\eta \rightarrow n=1$

$$g(x_i) = \sum_{j=0}^1 w_j^{\eta} f\left(x_i, \underbrace{\left(\frac{1+x_i^L}{2}\right) + \left(\frac{1-x_i^L}{2}\right)\eta_j}_{\eta_{ij}}\right) \left(\frac{1-x_i^L}{2}\right) + \epsilon_1^{\eta}(x_i)$$

donde :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = -0.57735026918963, \quad w_0^{\eta} = 1 \\ \eta_1 = -\eta_0, \quad w_1^{\eta} = w_0^{\eta} \end{array} \right.$$



Sustituyendo  $g(x_i)$  en  $I$  y despreciando los errores,

$$I \approx \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{1-x_i^2}{2} \right) w_i^x w_j^y}_{W_{ij}} + (x_i, y_{ij})$$

luego: 
$$I \approx \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 W_{ij} + (x_i, y_{ij})$$

donde,  $x_i = \frac{1}{2}(1 + \rho_i)$

$$y_{ij} = \left( \frac{1+x_i^2}{2} \right) + \left( \frac{1-x_i^2}{2} \right) \eta_j$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-x_i^2}{2} \right) w_i^x w_j^y$$

Operando (ver hoja excel), se obtiene

$$I \approx 0.48333333333333$$

Comparando con el valor exacto,  $I = 29/60$ ,

$$E = 29/60 - 0.48333333333333 = 0 \leftarrow \text{EXACTO}$$

Se obtiene el valor exacto en este caso porque

$$\begin{cases} f(x_i, y) \text{ es un } P_1(y) \Rightarrow g(x_i) \text{ se calcula exactamente} \\ \text{con Gauss-legendre con } n=1 \\ g(x) \text{ es un } P_5(x) \Rightarrow I \text{ se calcula exactamente} \\ \text{con Gauss-legendre con } n=3 \end{cases}$$

En general no se obtendrá el valor exacto.

Esto es una casualidad.



Caso b)06d

$$I = \int_{y=0}^{y=1} h(y) dy \left\{ \Rightarrow I = \int_{n=-1}^{n=1} h\left(\frac{1}{2}(1+n)\right) \frac{1}{2} dn \right.$$

$$y = \frac{1}{2}(1+n)$$

$$dy = \frac{1}{2} dn$$

Gauss-Legendre con 2 puntos en  $y \rightarrow n=1$ 

$$I = \sum_{j=0}^1 w_j^y h\left(\frac{1}{2}(1+n_j)\right) \frac{1}{2} + E_1^y$$

$$\text{donde: } \begin{cases} n_0 = -0.57735026918962, & w_0^y = 1 \\ n_1 = -n_0, & w_1^y = w_0^y \end{cases}$$

A su vez,

$$h(y_j) = \int_{x=0}^{x=\sqrt{y_j}} t(x, y_j) dx \left\{ \Rightarrow h(y_j) = \int_{s=-1}^{s=1} t\left(\frac{\sqrt{y_j}}{2}(1+s), y_j\right) \frac{\sqrt{y_j}}{2} ds \right.$$

$$x = \left(\frac{\sqrt{y_j}+0}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{y_j}-0}{2}\right) s$$

$$dx = \left(\frac{\sqrt{y_j}-0}{2}\right) ds$$

Gauss-Legendre con 4 puntos en  $x \rightarrow n=3$ 

$$h(y_j) = \sum_{i=0}^3 w_i^x t\left(\frac{\sqrt{y_j}}{2}(1+s_i), y_j\right) \frac{\sqrt{y_j}}{2} + E_3^x(y_j)$$

$$\text{donde: } \begin{cases} s_0 = -0.86113631159405, & w_0^x = 0.34785484513745 \\ s_1 = -0.33998104358486, & w_1^x = 0.65214515486255 \\ s_2 = -s_1, & w_2^x = w_1^x \\ s_3 = -s_0, & w_3^x = w_0^x \end{cases}$$

Substituyendo  $h(y_j)$  en  $I$  y despreciando los errores

$$I \approx \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^3 \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{b_j}}{2} W_j^Y W_i^X}_{W_{ji}} f(x_{ji}, y_j)$$

luego: 
$$I \approx \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^3 W_{ji} f(x_{ji}, y_j)$$

donde, 
$$y_j = \frac{1}{2}(1 + \eta_j)$$

$$x_{ji} = \frac{\sqrt{b_j}}{2}(1 + \xi_i)$$

$$W_{ji} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{b_j}}{2} W_j^Y W_i^X$$

Operando (ver hoja excel), se obtiene

$$I \approx 0,48210731803142$$

Comparando con el valor exacto,  $I = 29/60$ ,

$$E = 29/60 - 0,48210731803142 = 0.00122601530191 (\approx 0,25\%)$$

En este caso no se obtiene el valor exacto porque

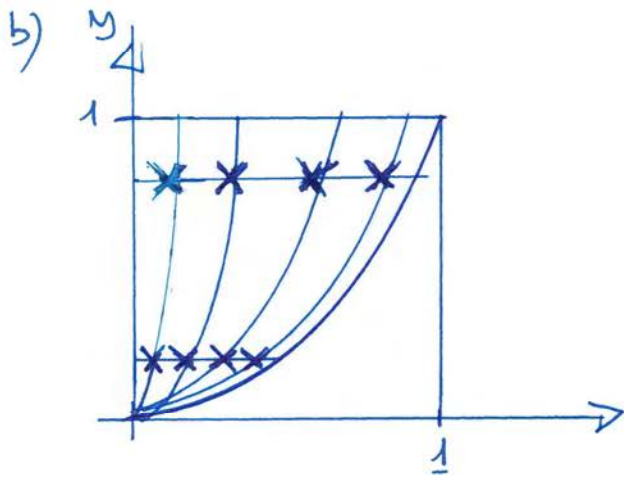
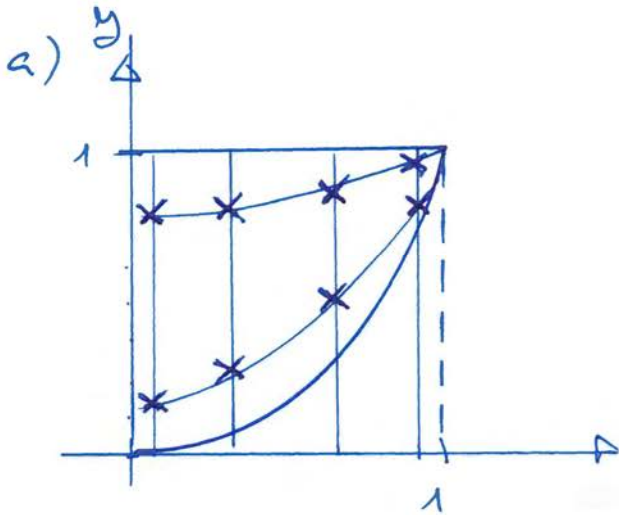
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y_j) \text{ es un } P_3(x) \Rightarrow h(y_j) \text{ se calcula exactamente} \\ \text{con Gauss-Legendre con } n=3 \\ h(y) \text{ no es un } P_n(y) \Rightarrow I \text{ no se calcula exactamente} \\ \text{con Gauss-Legendre con } n=1 \end{array} \right.$$

En general no se obtendrá el valor exacto.

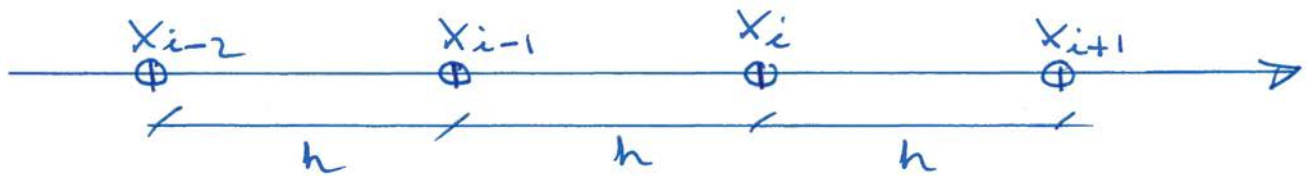
Esto es lo normal.



Útase que en los dos casos se utilizan  $4 \times 2 = 2 \times 4 = 8$  puntos de integración, pero su localización y sus pesos correspondientes son diferentes.



Se observa que los puntos de integración están mejor repartidos en el caso a) lo que explica que los resultados sean mejores.



planteamos los desarrollos de Taylor de  $f_j = f(x_j)$  para  $j \in \{i-2, i-1, i+1\}$  entorno a  $x_i$

$$\begin{cases} f_{i+1} \\ f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 64 & -128 & 256 \end{bmatrix} \begin{cases} f_i \\ f'_i h \\ f''_i h^2/2 \\ f'''_i h^3/6 \\ f^{IV}_i h^4/24 \\ f^{V}_i h^5/120 \\ f^{VI}_i h^6/720 \\ f^{VII}_i h^7/5040 \\ f^{VIII}_i h^8/40320 \end{cases}$$

Buscamos los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}$  tales que la combinación

$(\alpha_1 f_{i+1} + \alpha_{-1} f_{i-1} + \alpha_{-2} f_{i-2})$  tenga por coeficientes:

$$\begin{cases} \text{de } (f'_i h) \rightarrow 1 \\ \text{de } (f''_i h^2/2) \rightarrow 0 \\ \text{de } (f'''_i h^3/6) \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_{-1} \\ \alpha_{-2} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1/3 \\ \alpha_{-1} = -1 \\ \alpha_{-2} = 1/6 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} 1/3 f_{i+1} - f_{i-1} + 1/6 f_{i-2} &= (1/3 - 1 + 1/6) f_i + 1 \cdot f'_i h \\ &+ 0 \cdot f''_i h^2/2 + 0 \cdot f'''_i h^3/6 + (1/3 - 1 + 16/6) f^{IV}_i h^4/24 + \mathcal{O}(h^5) \end{aligned}$$

Dependiendo:

$$f'_i = \frac{f_{i-2} - 6f_{i-1} + 3f_i + 2f_{i+1}}{6h} - \frac{1}{12} f^{IV}_i h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$



$$V_D = \int_a^b A_D(x) dx, \quad V_T = \int_a^b A_T(x) dx; \quad a=1730\text{m}, b=1810\text{m}$$

a)  $h=10\text{m} \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = 8 \longrightarrow x_i = a + i \cdot h; i=0, \dots, n$

$$V_D \approx \frac{10\text{m}}{2} \left( 2.51 + 2(1.12 + 0.63 + 0.00 + 0.00 + 0.56 + 0.94 + 1.83) + 2.57 \right) \text{m}^2 \\ = 76.2 \text{m}^3$$

$$V_T \approx \frac{10\text{m}}{2} \left( 0.05 + 2(0.82 + 1.21 + 1.56 + 2.41 + 1.90 + 0.85 + 0.11) + 0.20 \right) \text{m}^2 \\ = 89.85 \text{m}^3$$

b)  $h=5\text{m} \Rightarrow n = \frac{b-a}{h} = 16 \longrightarrow x_i = a + i \cdot h; i=0, \dots, n$

$$V_D \approx \frac{5\text{m}}{2} \left( 2.51 + 2(1.32 + 1.12 + 0.85 + 0.63 + 0.05 + 0.00 + 0.00 + 0.00 + 0.25 + 0.56 + 0.85 + 0.94 + 1.57 + 1.83 + 2.61) + 2.57 \right) \text{m}^2 \\ = 75.6 \text{m}^3$$

$$V_T \approx \frac{5\text{m}}{2} \left( 0.05 + 2(0.61 + 0.82 + 0.95 + 1.21 + 1.35 + 1.56 + 2.58 + 2.41 + 2.21 + 1.90 + 1.50 + 0.85 + 0.34 + 0.11 + 0.00) + 0.20 \right) \text{m}^2 \\ = 92.625 \text{m}^3$$

c)  $n_1=8, n_2=16 \rightarrow I_R = \frac{4I_2 - I_1}{3}$

$$V_D \approx \frac{4 \cdot 75.6 - 76.2}{3} \text{m}^3 = 75.4 \text{m}^3$$

$$V_T \approx \frac{4 \cdot 92.625 - 89.85}{3} \text{m}^3 = 93.55 \text{m}^3$$

$$d) \quad h = 5m \Rightarrow n = \frac{b-a}{2h} = 8 \longrightarrow x_i = a + i \cdot h; \quad i = 0, \dots, 2n$$

$$V_D \approx \frac{5m}{3} \left( 2.51 + 4(1.32 + 0.85 + 0.05 + 0.00 + 0.25 + 0.85 + 1.57 + 2.61) + 2(1.12 + 0.63 + 0.00 + 0.00 + 0.56 + 0.94 + 1.83) + 2.57 \right) m^2$$

$$= 75.4 m^3$$

$$V_T \approx \frac{5m}{3} \left( 0.05 + 4(0.61 + 0.95 + 1.35 + 2.58 + 2.21 + 1.50 + 0.34 + 0.00) + 2(0.82 + 1.21 + 1.56 + 2.41 + 1.90 + 0.85 + 0.11) + 0.20 \right) m^2$$

$$= 93.55 m^3$$

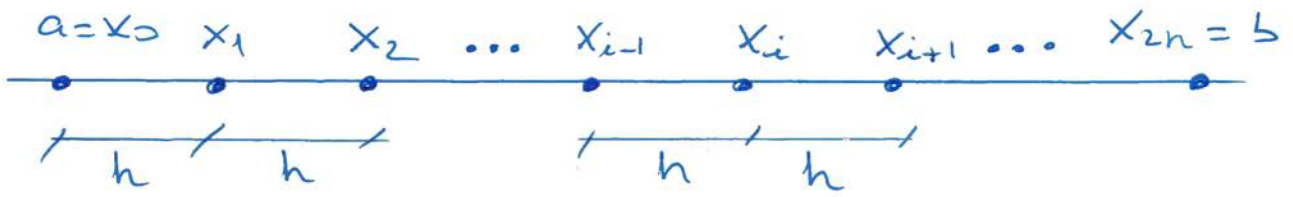
e) Observamos que la extrapolación de Richardson produce el mismo resultado que la regla de Simpson compuesta. No es una casualidad.

Se puede demostrar que la extrapolación de Richardson sobre los resultados de la regla del Trapecio compuesta con  $n_1 = n$  y  $n_2 = 2n$  subintervalos equivale al resultado de la regla de Simpson compuesta.

(Ver página siguiente)

En la práctica, para calcular áreas correctamente basta con la regla del Trapecio compuesta, aunque la regla de Simpson compuesta produce un resultado teóricamente más preciso con el mismo número de puntos y el mismo coste.



Demostación

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Regla del trapecio compuesto con  $n_1 = n$  subintervalos:

$$I_1 = \frac{(2h)}{2} \left( f_0 + 2 \sum_{i=2}^{2n-2} f_i + f_{2n} \right)$$

Regla del trapecio compuesto con  $n_2 = 2n$  subintervalos:

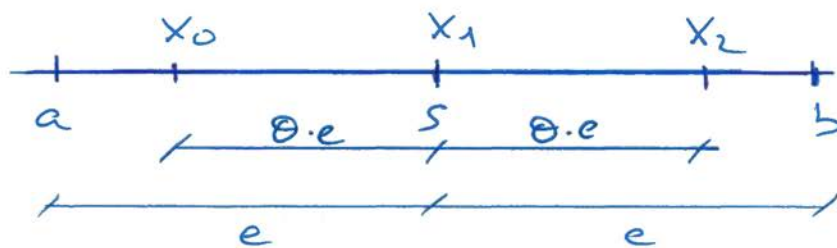
$$I_2 = \frac{h}{2} \left( f_0 + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} f_i + f_{2n} \right)$$

Extrapolación de Richardson con  $n_2 = 2n_1$ :

$$I_n = \frac{4I_2 - I_1}{3} = \frac{h}{3} \left( f_0 + 4 \sum_{i=1}^{2n-1} f_i - 2 \sum_{i=2}^{2n-2} f_i + f_{2n} \right)$$

$$= \frac{h}{3} \left( f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n} \right),$$

expresión que coincide con la regla compuesta de Simpson.



$$s = \frac{a+b}{2}, \quad e = \frac{b-a}{2}, \quad \theta \in (0, 1)$$

a)  $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$

$$P_2(x) = t_0 L_0(x) + t_1 L_1(x) + t_2 L_2(x) \quad \left[ \text{INT. DE LAGRANGE} \right]$$

$$\begin{cases} L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{cases}$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} L(x) \quad \left[ \text{RESTO DE LAGRANGE} \right]$$

$$L(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^b P_2(x) dx}_{I_2} + \underbrace{\int_a^b R_2(x) dx}_{E_2}$$

$$I_2 = t_0 \underbrace{\int_a^b L_0(x) dx}_{w_0} + t_1 \underbrace{\int_a^b L_1(x) dx}_{w_1} + t_2 \underbrace{\int_a^b L_2(x) dx}_{w_2}$$

$$E_2 = \int_a^b \frac{f'''(\xi(x))}{3!} L(x) dx$$

Cambio de variable:  $z = (x-s)/e$

$$\left. \begin{cases} x = s + ez \rightarrow dx = e dz \\ x_0 = s - e\theta \\ x_1 = s \\ x_2 = s + e\theta \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = e(z + \theta), & x_1 - x_0 = e\theta, & x_2 - x_0 = 2e\theta \\ x - x_1 = ez, & x_0 - x_1 = -e\theta, & x_2 - x_1 = e\theta \\ x - x_2 = e(z - \theta), & x_0 - x_2 = -2e\theta, & x_1 - x_2 = -e\theta \end{cases}$$

$$x = a \Leftrightarrow z = -1$$

$$x = b \Leftrightarrow z = +1$$

después:

$$\left\{ \begin{aligned} W_0 &= \int_{z=-1}^{z=+1} \frac{e z \cancel{e(z-\theta)}}{(-\cancel{e\theta})(-2\cancel{e\theta})} e dz = \frac{e}{2\theta^2} \int_{-1}^1 z(z-\theta) dz = \frac{e}{3\theta^2} \\ W_1 &= \int_{z=-1}^{z=+1} \frac{\cancel{e(z+\theta)} \cancel{e(z-\theta)}}{(\cancel{e\theta})(-\cancel{e\theta})} e dz = \frac{-e}{\theta^2} \int_{-1}^1 (z^2 - \theta^2) dz = \frac{e}{3\theta^2} (6\theta^2 - 2) \\ W_2 &= \int_{z=-1}^{z=+1} \frac{\cancel{e(z+\theta)} e z}{(2\cancel{e\theta})(\cancel{e\theta})} e dz = \frac{e}{2\theta^2} \int_{-1}^1 z(z+\theta) dz = \frac{e}{3\theta^2} \end{aligned} \right.$$

Comprobación: utilizamos  $f(x) = 1$

$$\int_a^b 1 \cdot dx = (b-a) = 2e$$


$$\int_a^b 1 \cdot dx = I_2 + E_L \quad \text{con} \quad \begin{cases} I_2 = 1 \cdot W_0 + 1 \cdot W_1 + 1 \cdot W_2 \\ E_L = 0 \text{ pues } f'''(x) = 0 \end{cases}$$

después se debe cumplir:

$$W_0 + W_1 + W_2 = 2e \leftarrow \text{CORRECTO}$$



$$\Rightarrow E_2 = \int_a^b \frac{f'''(\xi(x))}{3!} \zeta(x) dx = \frac{f'''(\mu)}{3!} \int_a^b \zeta(x) dx$$


 $\mu \in [a, b]$

Teorema del valor medio integral

$$\int_a^b \zeta(x) dx = \int_{t=-1}^{t=+1} e^{(t+\theta)} e^t e^{(t-\theta)} e dt$$

$$= e^{\zeta} \int_{-1}^1 z(z^2 - \theta^2) dz$$

Pero  $\int_{-1}^1 z(z^2 - \theta^2) dz = 0$ , pues  $g(z) = z(z^2 - \theta^2)$   
 es una función impar  $[g(z) = -g(-z)]$

luego  $E_2 = \frac{f'''(\mu)}{3!} \cdot e^{\zeta} \cdot 0 = 0$

c) El error de truncamiento  $E_2$  no puede ser nulo independientemente de la función  $f(x)$  que se integre y el intervalo de integración  $[a, b]$ , ya que si esto fuera cierto todas las funciones que tuvieran los mismos valores en  $x=x_0, x=x_1, x=x_2$  tendrían lo mismo integral en el intervalo  $[a, b]$ , y bastaría con conocer los valores  $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$  para calcular exactamente el valor de  $\int_a^b f(x) dx$ . Esto es absurdo.

El resultado está mal porque el teorema del valor medio integral sólo garantiza que exista  $\mu \in [a, b]$  que verifique

$$\int_a^b g(x)\zeta(x) dx = g(\mu) \int_a^b \zeta(x) dx \text{ cuando } \zeta(x) \text{ no}$$

cambia de signo en el intervalo  $[a, b]$ . Y esto no se cumple.

Sin embargo, si  $f'''(x) = cte$  se puede sacar su valor fuera de lo integral, aunque  $w(x)$  cambie de signo en el intervalo  $[a, b]$ . Por tanto,

$$f'''(x) = cte \Rightarrow E_2 = 0$$

Esto significa que la cuadratura integra exactamente cualquier polinomio de grado 3 o inferior, es que

$$f(x) = P_3(x) \Rightarrow f'''(x) = cte.$$

Esto nos permite conjeturar que el error de truncamiento es de la forma

$$E_2 = K f^{IV}(\mu), \quad \mu \in [a, b]$$

d) Para  $\Theta = 0.77459666924148$  la cuadratura es equivalente a la de Gauss - depende de 3 puntos ( $n=2$ ) para lo que

$$E_2 = K f^{(6)}(\mu), \quad \mu \in [a, b]$$

que integra exactamente polinomios de grado 5 o inferior.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \quad ; \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \rightarrow \infty$$

a) En casos como éste lo más conveniente es aislar la singularidad.

El enunciado sugiere plantear el cálculo en la forma:

$$I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}_{\phi(x)} dx + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)} dx$$

Si la función  $g(x)$  se le eligió correctamente,  $\phi(x)$  no tendrá singularidades en el intervalo de integración (por lo que se podrá calcular numéricamente sin problemas)  $\Rightarrow g(x)$  se podrá integrar analíticamente.

Efectivamente:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^{\pi/2} x^{-1/2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2x^{1/2} \Big|_{\epsilon}^{\pi/2} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2(\pi/2)^{1/2} - 2\epsilon^{1/2}) = 2(\pi/2)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{f(x)}}{\sqrt{x f(x)}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{f(x)}) (\sqrt{x} + \sqrt{f(x)})}{\sqrt{x f(x)} (\sqrt{x} + \sqrt{f(x)})} \\ &= \frac{x - f(x)}{\sqrt{x f(x)} (\sqrt{x} + \sqrt{f(x)})} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(x) = \frac{-x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)}{\sqrt{x^2} \cdot 2\sqrt{x}} \\ f(x) = x + x^3/3 + \mathcal{O}(x^5) \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{6} x^{3/2} + \mathcal{O}(x^{7/2})$$

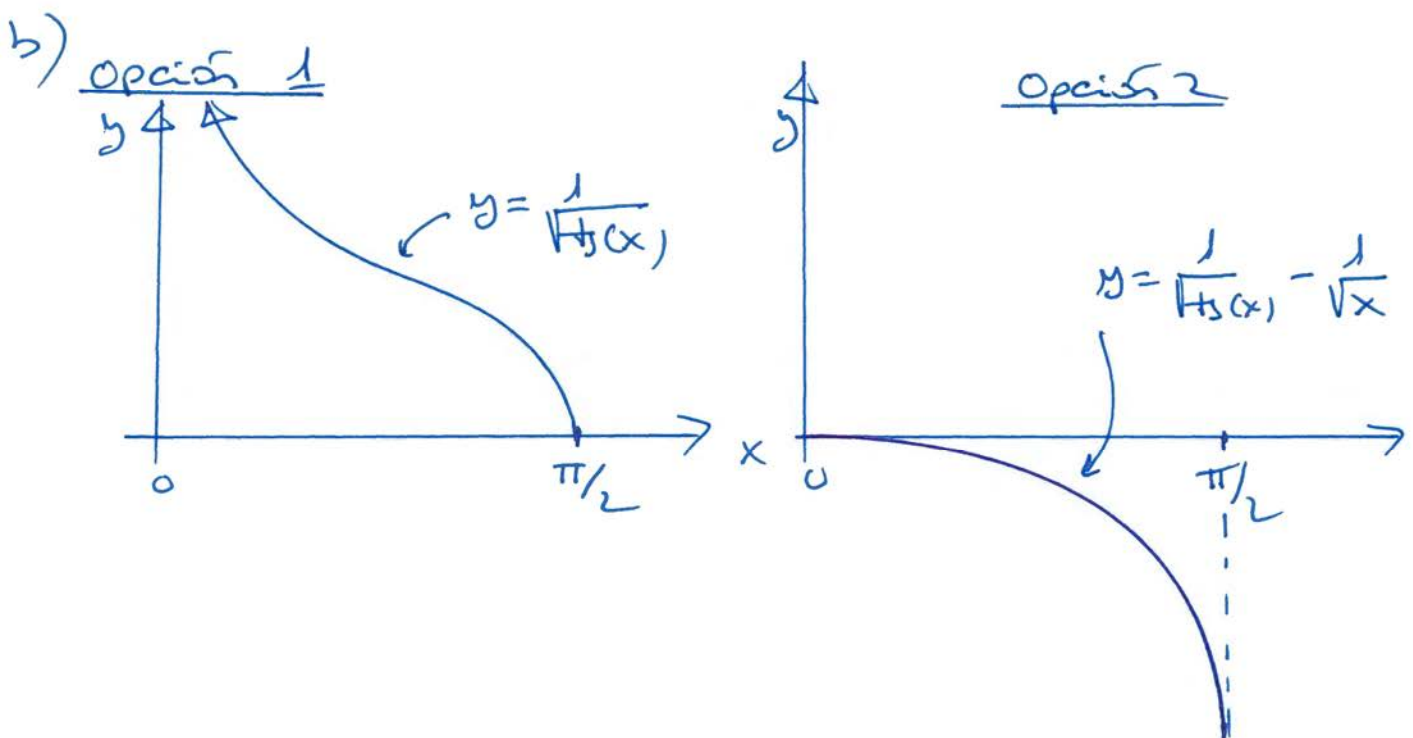


Luego  $x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$  (ya no hay singularidad)

Para integrar  $f(x)$  se puede utilizar (por ejemplo) una cuadratura adaptativa basada en la regla del trapecio compuesta o en la regla de Simpson compuesta, que permiten obtener el resultado con la precisión que se desee.

Para ser  $f(x)$  una función regular en  $[0, \pi/2]$ , cabe esperar que la utilización de una cuadratura de Gauss-Legendre con suficientes puntos de integración también debería proporcionar un resultado notablemente bueno.

Por el contrario, si no se aísla la singularidad y se utiliza directamente una cuadratura de Newton-Cotes abierta (para evitar el punto  $x=0$ ) no dispondremos de ninguno esto del error de integración, por lo que la precisión del resultado será totalmente incierta.



Si se recurre a la opción 1 hay que tener en cuenta que la función subintegrando tiene una asíntota vertical en  $x=0$ . Cabe prever que serán necesarias muchas puntos de integración, las cuadraturas de Newton-Cotes pueden descartarse, ya que no garantizan la convergencia. Para poder utilizar un gran número de puntos, la mejor elección parece ser la cuadratura de Gauss-Chebyshev, que está indicada para casos en que la función subintegrando se comporta como  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  en los extremos  $x=-1, x=1$  (con asíntotas verticales, por tanto) y cuyos puntos y pesos de integración se pueden obtener analíticamente sin necesidad de recurrir a tablas numéricas.

Si se recurre a la opción 2, la forma de la función subintegrando es similar a la de una parábola por lo que una cuadratura de Gauss-Legendre con 2 o 3 puntos debería proporcionar un resultado notablemente bueno.

c) La opción 1 no garantiza que se pueda obtener un resultado de alta precisión por los motivos expuestos anteriormente (el error no está acotado, el resultado puede ser muy malo aunque se utilicen muchos puntos, y la convergencia no está garantizada).

La opción 2 garantiza la obtención de un resultado de alta precisión siempre que se utilice una cuadratura de Gauss-Legendre con un número suficiente de puntos, lo que mejor utilizar una cuadratura adaptativa.



d) la opción 1 no es adecuada por los motivos ya expuestos <sup>10d</sup>  
 la opción 2 puede ser adecuada si se incluye un  
 número suficiente de puntos de interpolación

Hay que tener en cuenta que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{f_8(x)}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

no se puede evaluar directamente en  $x=0$  (puesto que  $f_8(x)$   
 no está definido en ese punto), y si se calcula  $f(x)$   
 para valores de  $x$  pequeños el error de redondeo puede  
 ser muy elevado (para verse números parecidos).

Debería que plantear una expresión alternativa para valores  
 de  $x$  cercanos a 0, por ejemplo

$$f(x) = -\frac{1}{6} x^{3/2} + O(x^{7/2})$$

como hemos visto anteriormente.

e) Gauss-Legendre con 3 puntos  $\Rightarrow n=2$

$$\int_0^{\pi/4} f(x) dx = \int_{-1}^1 h(z) dz \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = \pi/4 (1+z) \\ h(z) = \pi/4 f(x) \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 h(z) dz \approx w_0 h(z_0) + w_1 h(z_1) + w_2 h(z_2)$$

$i$	$z_i$	$w_i$
0	-0.77459666924148	0.555555555555556
1	0.000000000000000	0.888888888888889
2	0.77459666924148	0.555555555555556



Opción 1

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \approx \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^2 w_i \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi/4)(1+z_i)}}$$

$$\approx 1.914277350$$

$$E = \underbrace{2.221441469}_{\pi/\sqrt{2}} - 1.914277350 = 0.307164119 \quad (\sim 13.83\%)$$

Opción 2

$$I = \int_0^{\pi/4} f(x) dx + \sqrt{2}\pi \approx \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^2 w_i \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi/4)(1+z_i)}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_i}} \right)$$

$$+ \sqrt{2}\pi$$

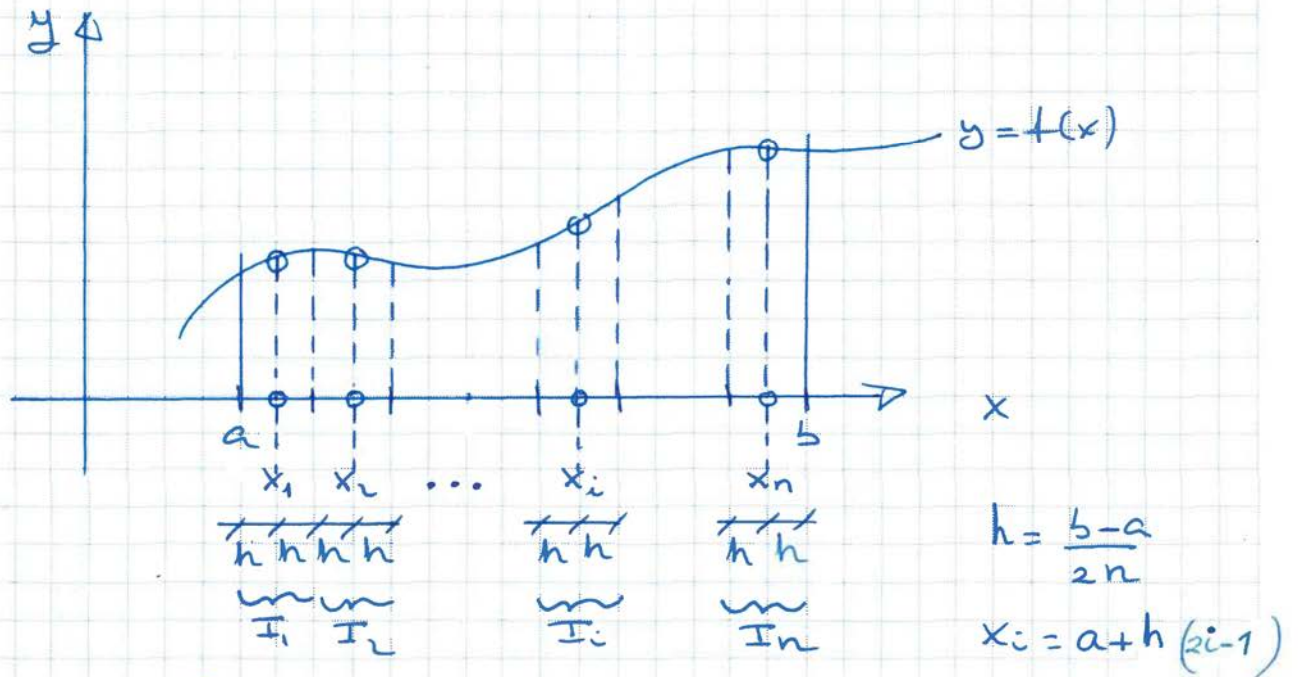
$$\approx 2.226524054$$

$$E = \underbrace{2.221441469}_{\pi/\sqrt{2}} - 2.226524054 = -0.005082585 \quad (\sim 0.23\%)$$

Observamos que la opción 2 proporciona un resultado mucho más preciso, como es previsible.

Véase el archivo Num-pr2-ej11-FCSA.t,

el que se accede mediante el link Ejercicio 11



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f(x) dx$$

$$\int_{I_i} f(x) dx = 2h f(x_i) + \frac{h^3}{3} f''(x_i), \quad x_i \in I_i$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left[ 2h f(x_i) + \frac{h^3}{3} f''(x_i) \right] = 2h \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{h^3}{3} \sum_{i=1}^n f''(x_i)$$

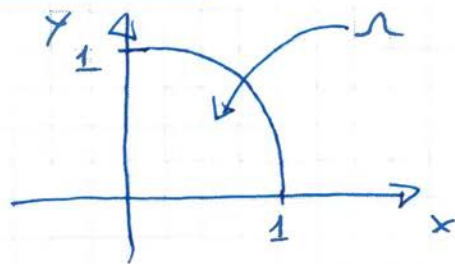
Sea  $\mu$  tal que  $f''(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(x_i)$ ,  $\mu \in [a, b]$

<p>Entonces</p> $\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{i=1}^n f(x_i) + E; \quad E = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\mu)$ $h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_i = a + h(2i-1); \quad \mu \in [a, b]$
---

Observemos que la fórmula es muy parecida a la del trapecio compuesto. A igualdad del número de puntos, esta fórmula (con un subintervalo más) tiene un error que es del orden de la mitad del de la fórmula del trapecio compuesto. Sin embargo se prefiere la del trapecio porque al duplicar el número de subintervalos en esta fórmula no se repiten los puntos anteriores utilizados.



$$I = \iint_{\Omega} f(x,y) d\Omega$$



$$a.) \quad I = \int_{x=0}^{x=1} \left[ \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \right] dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varphi(x)}$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \varphi(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 w_i \varphi(x_i) \quad \text{con } x_i = \frac{1+z_i}{2}$$

$$\begin{cases} i=0 \rightarrow z_0 = -0,57735026918963, & w_0 = 1 \\ i=1 \rightarrow z_1 = +0,57735026918963, & w_1 = 1 \end{cases}$$

$$\varphi(x_i) = \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x_i^2}} f(x_i, y) dy \approx \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{2} \sum_{j=0}^1 w_j f(x_i, y_{ij})$$

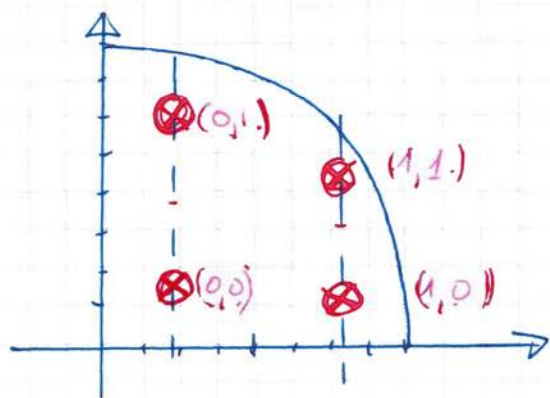
con  $y_{ij} = \sqrt{1-x_i^2} \frac{(1+z_j)}{2}$

luego

$$I \approx \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 W_{ij} f(x_i, y_{ij})$$

$$\text{con } W_{ij} = w_i w_j \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{4}, \quad x_i = \frac{1+z_i}{2}, \quad y_{ij} = \sqrt{1-x_i^2} \frac{(1+z_j)}{2}$$

Puntos de integración



$$P_{0,0} \equiv \left( \frac{1+z_0}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{1+z_0}{2}\right)^2} \frac{1+z_0}{2} \right)$$

$$P_{0,1} \equiv \left( \frac{1+z_0}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{1+z_0}{2}\right)^2} \frac{1+z_1}{2} \right)$$

$$P_{1,0} \equiv \left( \frac{1+z_1}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{1+z_1}{2}\right)^2} \frac{1+z_0}{2} \right)$$

$$P_{1,1} \equiv \left( \frac{1+z_1}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{1+z_1}{2}\right)^2} \frac{1+z_1}{2} \right)$$

$$b) I = \int_{y=0}^{y=1} \underbrace{\left[ \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \right]}_{\psi(y)} dy$$

$$I = \int_{y=0}^{y=1} \psi(y) dy \approx \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 w_j \psi(y_j) \quad \text{con } y_j = \frac{1+t_j}{2}$$

$$\psi(y_j) = \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y_j^2}} f(x, y_j) dx \approx \frac{\sqrt{1-y_j^2}}{2} \sum_{i=0}^1 w_i f(x_{ji}, y_j)$$

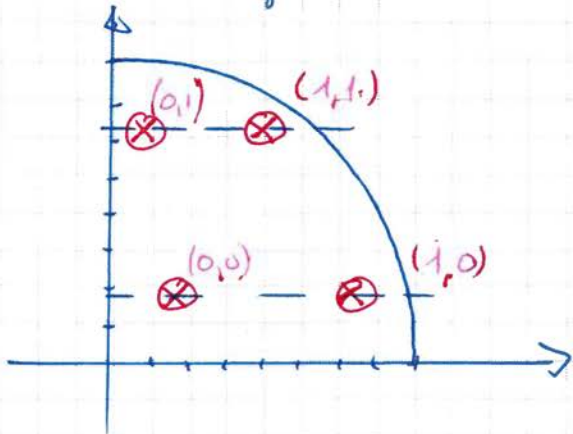
$$\text{con } x_{ji} = \sqrt{1-y_j^2} \left( \frac{1+t_i}{2} \right)$$

luego:

$$I \approx \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 W_{ij} f(x_{ji}, y_j)$$

$$\text{con } W_{ij} = w_i w_j \frac{\sqrt{1-y_j^2}}{2}, \quad y_j = \frac{1+t_j}{2}, \quad x_{ji} = \sqrt{1-y_j^2} \left( \frac{1+t_i}{2} \right)$$

Puntos de Integración:



$$P_{0,0} \equiv \left( \sqrt{1-\left(\frac{1+t_0}{2}\right)^2} \frac{1+t_0}{2}, \frac{1+t_0}{2} \right)$$

$$P_{1,0} \equiv \left( \sqrt{1-\left(\frac{1+t_1}{2}\right)^2} \frac{1+t_1}{2}, \frac{1+t_0}{2} \right)$$

$$P_{0,1} \equiv \left( \sqrt{1-\left(\frac{1+t_0}{2}\right)^2} \frac{1+t_0}{2}, \frac{1+t_1}{2} \right)$$

$$P_{1,1} \equiv \left( \sqrt{1-\left(\frac{1+t_1}{2}\right)^2} \frac{1+t_1}{2}, \frac{1+t_1}{2} \right)$$

Observemos que los cuatro puntos están en distintas posiciones.

$\Rightarrow$  En general, el valor numérico de la integral que obtendremos será distinto al del apartado anterior.

Observemos también que la pesa tampoco son las mismas que las del apartado anterior (aunque  $w_{00}$  y  $w_{11}$  coinciden).



$$e) \quad I = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \underbrace{\left[ \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho + (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho \right]}_{\varphi(\theta)} d\theta$$

$$I = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \varphi(\theta) d\theta \approx \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^1 w_i \varphi(\theta_i) \quad \text{con } \theta_i = \frac{\pi}{2} \frac{1+z_i}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i=0 \rightarrow z_0 = -0,5773502691896, \quad w_0 = 1 \\ i=1 \rightarrow z_1 = +0,5773502691896, \quad w_1 = 1 \end{array} \right.$$

$$\varphi(\theta_i) = \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho + (\rho \cos \theta_i, \rho \sin \theta_i) d\rho \approx \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 w_j \rho_j + (\rho_j \cos \theta_i, \rho_j \sin \theta_i)$$

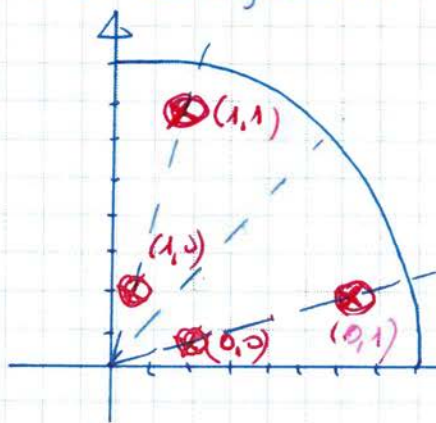
$$\text{con } \rho_j = \frac{1+z_j}{2}$$

luego:

$$I \approx \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 W_{ij} + (\rho_j \cos \theta_i, \rho_j \sin \theta_i)$$

$$\text{con } W_{ij} = w_i w_j \frac{\pi}{8} \rho_j, \quad \theta_i = \frac{\pi}{2} \frac{1+z_i}{2}, \quad \rho_j = \frac{1+z_j}{2}$$

Puntos de integración:



$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \frac{\pi}{2} \frac{1+z_0}{2} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1+z_1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \frac{1+z_0}{2} \\ \rho_1 = \frac{1+z_1}{2} \end{array} \right.$$



$$d) \quad I = \int_{p=0}^{p=1} p \left[ \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} f(p \cos \theta, p \sin \theta) d\theta \right] dp$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\psi(p)}$

$$I = \int_{p=0}^{p=1} p \psi(p) dp \approx \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{1} w_j p_j \psi(p_j) \quad \text{con } p_j = \frac{1+t_j}{2}$$

$$\psi(p_j) = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} f(p_j \cos \theta, p_j \sin \theta) d\theta \approx \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^1 w_i f(p_j \cos \theta_i, p_j \sin \theta_i)$$

con  $\theta_i = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1+t_i}{2} \right)$

luego:

$$I \approx \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 w_{ij} f(p_j \cos \theta_i, p_j \sin \theta_i)$$

$$\text{con } w_{ij} = w_i w_j \frac{\pi}{8} p_j, \theta_i = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1+t_i}{2} \right), p_j = \frac{1+t_j}{2}$$

En este caso se obtiene la misma fórmula que en el apartado anterior.

Las puntos y los pesos de integración son los mismos porque los extremos de integración en  $p$  y en  $\theta$  son constantes y no dependen el uno del otro.

Por tanto, en este caso se obtendrá el mismo valor numérico de la integral que en el apartado anterior.

e) Si  $t(x, y) = n(\rho)$ , entonces

$$I \approx \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 w_i w_j \pi/8 \rho_j n(\rho_j) \quad \text{con } \rho_j = \frac{1+j}{2}$$

$$\text{luego } I \approx \sum_{j=0}^1 \left( \sum_{i=0}^1 w_i \right) w_j \pi/8 \rho_j n(\rho_j)$$

$$\text{Por tanto, } \boxed{I \approx \frac{\pi}{4} \sum_{j=0}^1 w_j \rho_j n(\rho_j) \quad \text{con } \rho_j = \frac{1+j}{2}}$$

f) Si  $t(x, y) = g(x, y) / r(x, y)$  con  $g(x, y)$  regular y

$r(x, y) = \rho$ , podríamos utilizar tanto las fórmulas de

integración en cartesianas como en polares. Sin embargo, en cartesianas tenemos una singularidad en el punto  $x=y=0$ , mientras que la singularidad desaparece en polares (pues el divisor se cancela con el término  $\rho$  que introduce el diferencial de área en polares ( $dr = \rho d\rho d\theta$ )). Por tanto, sería preferible las fórmulas de integración en polares.

g) Si  $g(x, y) = 1 \rightarrow t(x, y) = n(\rho) = 1/\rho$

$$\text{luego } I \approx \pi/4 \left( \sum_{j=0}^1 w_j \right) = \pi/2$$

Ostendemos el valor exacto, porque estamos calculando

$$I = \iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\rho} \rho d\rho d\theta = \iint_{\mathcal{R}} d\rho d\theta = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi/2$$

Las funciones subintegradas en  $\rho$  y en  $\theta$  son polinomios de grado cero (y valor  $P_0(\rho) = 1$ ,  $P_0(\theta) = 1$ ), por lo que la fórmula de integración de Gauss -depende de el valor exacto de lo integral.