**CÁLCULO NUMÉRICO** **Curso 2023–2024, PRÁCTICA 2**

**Integración y Deriv. Num.** (Fecha de entrega **del prob. 14**: 02/04/2024)

**1.– [REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS]**

Calcular analíticamente la integral $\int_1^2 \ln(x)dx$. Evaluar numéricamente la integral anterior utilizando las cuadraturas de Newton-Cotes de 3 y 4 puntos de integración. Calcular el error cometido en cada caso y compararlo con las cotas de error de las cuadraturas. Comparar la eficacia de ambas fórmulas.

**2.– [REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS]**

Repetir el problema anterior para la integral $\int_0^1 \ln(x)dx$. Analizar críticamente los problemas planteados en este caso.

**3.– [REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS]**

Obtener mejores aproximaciones a los valores de las integrales de los problemas 1 y 2 combinando los resultados obtenidos con las cuadraturas de 3 y 4 puntos en cada caso. Estudiar hasta que punto son fiables las hipótesis realizadas en la combinación de las cuadraturas, y analizar los resultados obtenidos.

**4.– [REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS]**

Se desea evaluar numéricamente la integral del problema 1 con mayor precisión. Para ello se barajan dos alternativas:

**a)** Utilizar una fórmula de Newton-Cotes de 7 puntos.
**b)** Utilizar la fórmula de Simpson compuesta con 7 puntos de integración.

Estimar las cotas de error en cada caso y compararlas. ¿Qué alternativa parece más conveniente? Evaluar la integral mediante ambas fórmulas y comparar (entre sí y con sus respectivas cotas) los errores cometidos.

**5.–** Se desea evaluar numéricamente la integral del problema 2 con mayor precisión. Para ello se barajan dos alternativas:

**a)** Utilizar una fórmula de Newton-Cotes de 7 puntos.
**b)** Aplicar la transformación $z = -\ln(x)$ y evaluar la integral correspondiente mediante la cuadratura de Gauss más conveniente.

Estimar las cotas de error en cada caso y compararlas. ¿Qué alternativa parece más conveniente? Evaluar la integral mediante ambas fórmulas y comparar los resultados con sus respectivas cotas de error.

**6.–** Se desea calcular la integral de la función $f(x, y) = x^3 + y$ en el recinto comprendido entre la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$. Evaluar numéricamente la integral utilizando cuadraturas de Gauss-Legendre de 4 puntos de integración en $x$ y dos puntos de integración en $y$. ¿Es exacto (salvo errores de redondeo) el resultado obtenido? ¿Por qué?

**7.–** Aproximar la derivada respecto a $x$ de la función $y(x)$ en el punto $x_i$ mediante una fórmula en diferencias que emplee los valores de la función en los nodos equiespaciados: $\{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$, de forma que el orden de la aproximación sea lo mayor posible. Obtener el error de truncamiento de la aproximación.

---

**8.–** **[REPASO DE CONCEPTOS BÁSICOS]**

De una carretera que se está proyectando se han obtenido perfiles transversales cada 5 metros. En cada perfil se han medido con un planímetro las áreas de desmonte y terraplén, que se recogen en la tabla adjunta. Se desea calcular el volumen de movimiento de tierras en desmonte y en terraplén que se ha de efectuar en el tramo comprendido entre los puntos kilométricos 1730 y 1810 de la carretera. Calcular los volúmenes citados mediante las siguientes técnicas: **a)** la regla del trapecio compuesta utilizando sólo los datos de los puntos kilométricos que son múltiplos de 10, **b)** la regla del trapecio compuesta utilizando todos los datos disponibles, **c)** una extrapolación de Richardson entre los valores obtenidos previamente, y **d)** la regla de Simpson compuesta utilizando todos los datos disponibles. Comparar y comentar los resultados que se obtienen con los diferentes métodos.

| Punto Kilométrico ($m$) | Area Desmonte ($m^2$) | Area Terraplén ($m^2$) |
|---|---|---|
| 1730 | 2.51 | 0.05 |
| 1735 | 1.32 | 0.61 |
| 1740 | 1.12 | 0.82 |
| 1745 | 0.85 | 0.95 |
| 1750 | 0.63 | 1.21 |
| 1755 | 0.05 | 1.35 |
| 1760 | 0.00 | 1.56 |
| 1765 | 0.00 | 2.58 |
| 1770 | 0.00 | 2.41 |
| 1775 | 0.25 | 2.21 |
| 1780 | 0.56 | 1.90 |
| 1785 | 0.85 | 1.50 |
| 1790 | 0.94 | 0.85 |
| 1795 | 1.57 | 0.34 |
| 1800 | 1.83 | 0.11 |
| 1805 | 2.61 | 0.00 |
| 1810 | 2.57 | 0.20 |

TABLA I. Areas de Desmonte y Terraplén. Perfiles transversales cada $5m$.

---

**9.–** Para evaluar numéricamente la integral $I = \int_a^b f(x)dx$ se conocen los valores $f_0$, $f_1$ y $f_2$ de la función $f(x)$ en los puntos:

$$x_0 = s - e\theta, \qquad x_1 = s, \qquad x_2 = s + e\theta$$

siendo: $s = (a+b)/2$, $e = (b-a)/2$, y $\theta$ una constante determinada $(0 < \theta < 1)$.

Se pide:

**a)** Desarrollar completamente una cuadratura de Newton para este caso, determinando los valores de los pesos de integración en función de las constantes $s$, $e$ y $\theta$.

**b)** Calcular el error de truncamiento de la cuadratura por el procedimiento habitual, y comprobar que se anula en cualquier caso.

**c)** ¿Puede ser nulo el error de truncamiento en cualquier caso? Explicar razonadamente esta paradoja, y establecer una conjetura sobre la forma del error de truncamiento real de la cuadratura.

**d)** ¿Existe algún valor de la constante $\theta$ para el cual la cuadratura es más precisa? ¿Cuál? ¿Cuál sería el error de truncamiento en este caso? ¿Concuerda esto con la conjetura establecida en el apartado anterior? ¿Por qué?

*Sugerencia: Efectuar el cambio de variable $z = (x - s)/e$ para simplificar los cálculos.*

---

**10.–** Un ingeniero necesita conocer rápidamente, y con una aproximación "razonable", el valor de la integral

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}} dx.$$

Sólo dispone de una calculadora no programable, y rechaza la utilización de cuadraturas compuestas debido a la longitud de los cálculos. La singularidad de la función subintegrando impide el uso de cuadraturas cerradas, y el ingeniero se plantea las siguientes opciones:

1) Utilizar una cuadratura abierta de Newton-Cotes o de Gauss-Legendre.
2) Aislar la singularidad, reescribiendo la integral en la forma

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx, \quad \text{con } f(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \; g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Así, la integral de $f(x)$ puede evaluarse mediante una cuadratura abierta o cerrada (ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$), y la integral de $g(x)$ se calcula analíticamente.

Se pide:

**a)** Explicar razonadamente cuál de las dos opciones es mejor.
**b)** Dibujar aproximadamente las funciones subintegrando, y discutir qué cuadratura es más aconsejable en cada caso y el número de puntos de integración necesarios.
**c)** En ambos casos, explicar si puede obtenerse con certeza un resultado de alta precisión, y cuántos puntos de integración serían necesarios.
**d)** Si se desea obtener posteriormente (utilizando un ordenador) un resultado de alta precisión, ¿serían adecuados los procedimientos anteriores? ¿Qué modificaciones convendría efectuar?
**e)** Evaluar la integral mediante ambos procedimentos utilizando la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos. Comentar los resultados en comparación con el valor exacto ($I = \pi/\sqrt{2} \approx 2.221441469$).

---

**11.–** Realizar una subrutina FORTRAN que permita calcular la integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ mediante una cuadratura compuesta adaptativa de Simpson. El número de subintervalos se duplicará en cada iteración hasta que el error de integración sea inferior a un valor predeterminado. El error de integración se estimará mediante la extrapolación de Richardson.

---

**12.–** Desarrollar completamente una fórmula de integración compuesta para puntos equiespaciados a partir de la cuadratura abierta de Newton-Cotes con un punto de integración:

$$\int_a^b f(x)dx = 2hf(x_0) + \frac{h^3}{3}f''(\chi), \qquad \text{con} \quad x_0 = a + h, \quad h = \frac{b-a}{2}.$$

Comparar el error de integración de este procedimiento (Fórmula Compuesta del Punto Medio) con el correspondiente a la fórmula compuesta del trapecio cuando se utiliza el mismo número de puntos de integración.

---

**13.–** Se desea calcular la integral de superficie

$$I = \int\int_\Omega f(x,y)d\Omega$$

donde $\Omega$ es el cuarto situado en el primer cuadrante de un círculo de radio unidad centrado en el origen de coordenadas, y $f(x,y)$ es una función arbitraria y suficientemente regular en $\Omega$. Se pide:

**a)** Desarrollar completamente una fórmula de integración para calcular $I$ en coordenadas cartesianas $(x,y)$, utilizando una cuadratura de Gauss de 2 puntos en las integraciones sobre $x$ e $y$. Realizar un dibujo indicando claramente la posición de los puntos de integración en el dominio $\Omega$ (y dando sus coordenadas).

**b)** Repetir el apartado anterior invirtiendo el orden de integración de las variables. Comparar las posiciones de los puntos de integración e indicar si se obtendrá el mismo resultado numérico en los dos casos.

**c)** Desarrollar completamente una fórmula de integración para calcular $I$ en coordenadas polares $(\rho,\theta)$, utilizando una cuadratura de Gauss de 2 puntos en la integraciones sobre $\rho$ y $\theta$. Realizar un dibujo indicando claramente la posición de los puntos de integración en el dominio $\Omega$ (y dando sus coordenadas).

**d)** Repetir el apartado anterior invirtiendo el orden de integración de las variables. Comparar las posiciones de los puntos de integración e indicar si se obtendrá el mismo resultado numérico en los dos casos.

**e)** Simplificar al máximo las fórmulas obtenidas en los dos apartados anteriores para el caso en que la función $f(x,y)$ tenga simetría de revolución en torno al origen.

**f)** Supongamos que la función $f(x,y)$ es de la forma $f(x,y) = g(x,y)/r(x,y)$, donde $r(x,y)$ es la distancia del punto $(x,y)$ al origen de coordenadas y $g(x,y)$ es una función suficientemente regular en $\Omega$. ¿Cuál de las fórmulas de integración desarrolladas en los apartados anteriores sería preferible en este caso? ¿Por qué?

**g)** Calcular el valor de la integral mediante la fórmula sugerida en el apartado anterior cuando $g(x,y) = 1$. Comparar el resultado con la solución analítica. ¿Es exacto el resultado? ¿Por qué?

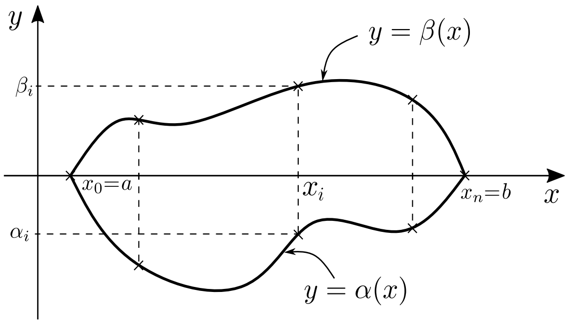
**Nota:** En coordenadas polares, el ángulo $\theta$ se medirá a partir del eje $X$ en sentido anti-horario.

---

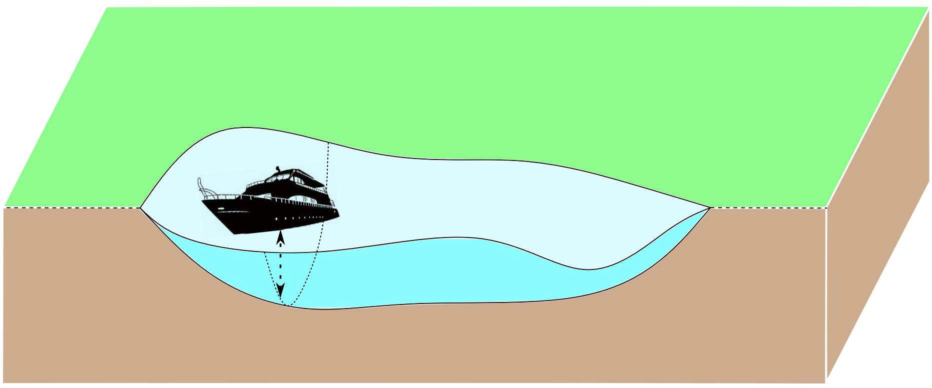
**14.– [PROBLEMA QUE SE ENTREGARÁ RESUELTO]**

Un ingeniero necesita calcular el volumen de agua que contiene un lago cuyo contorno se representa en la figura adjunta. El eje $x$ está orientado de forma que une el punto por el que el agua entra en el lago ($x = a$) y el punto por el que sale ($x = b$).

Mediante técnicas topográficas se han obtenido las coordenadas $y = \alpha_i$ e $y = \beta_i$ (que corresponden a puntos situados sobre las partes inferior y superior del contorno, respectivamente) para los valores equiespaciados $x = x_i$ con $i = 0, \ldots, n$, donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Dada la escala a la que se está trabajando, puede suponerse que la anchura de los canales de entrada y de salida es despreciable, por lo que $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ y $\alpha_n = \beta_n = 0$.




Se dispone de una embarcación que permite medir la profundidad en cualquier punto del lago. La medición de la profundidad de cada punto es la parte más costosa del proceso y, por tanto, el coste total de la operación depende fundamentalmente del número de puntos a medir. Obviamente, se desea obtener una aproximación razonable del volumen pero realizando las mediciones estrictamente necesarias.



Se pide:

**a)** A partir de los valores $x_i$, $\alpha_i$ y $\beta_i$ obtener los splines cúbicos naturales $y = S_\alpha(x)$ e $y = S_\beta(x)$ que permiten aproximar respectivamente la orilla inferior $y = \alpha(x)$ y la orilla superior $y = \beta(x)$ del lago.

**b)** Plantear un método numérico que permita integrar el volumen del lago a partir de la información obtenida en el primer apartado utilizando las cuadraturas de Gauss-Legendre. Indicar de forma justificada cuantos puntos de integración convendría utilizar, dónde habría que posicionar la embarcación para medir la profundidad y cuál sería el valor de los pesos de integración correspondientes.

**c)** Plantear un método numérico que permita integrar el volumen del lago a partir de la información obtenida en el primer apartado utilizando la cuadratura compuesta de Simpson. Indicar de forma justificada cuantos puntos de integración convendría utilizar, dónde habría que posicionar la embarcación y cuál sería el valor de los pesos de integración correspondientes.

**d)** ¿Cual de los dos métodos anteriores proporcionará un resultado mejor, en general?

**e)** Dado que la profundidad es conocida (nula) en el contorno del dominio de integración, ¿convendría utilizar cuadraturas de Gauss-Lobatto en lugar de cuadraturas de Gauss-Legendre para la integración según la coordenada $y$? Justificar la respuesta.

Notas:

- Se tomará como valor de $n$ el primer dígito del DNI/Pasaporte del estudiante que sea mayor que 3 y menor que 7. De no existir ningún valor en ese rango se utilizará $n = 5$
- Se tomará como valor de $a$ (en Hm) el menor dígito del DNI/Pasaporte.
- Se tomará como valor de $b$ (en Hm) el mayor dígito del DNI/Pasaporte.
- Se tomarán como valores de $\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_{n-1}$ (en Hm) las sucesivas cifras del DNI/Pasaporte con signo positivo, empezando por la primera y avanzando hacia adelante.
- Se tomarán como valores de $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_{n-1}$ (en Hm) las sucesivas cifras del DNI/Pasaporte empezando por la última y avanzando hacia atrás, con signo negativo.
- En caso de que la aplicación de estas reglas produzca un contorno que no tenga sentido, el estudiante propondrá una ligera modificación que corrija el problema.