CÁLCULO NUMÉRICO **Curso 2023–2024, PRÁCTICA 1**

Interpolación (Fecha de entrega **del problema 10**: 08/03/2024)

1.– Dada la función $f(x) = \ln(x)$ se pide:

- **a)** Interpolar un polinomio por los puntos $x_0 = 1.00$, $x_1 = 2.00$, y $x_2 = 0.50$.
- **b)** Interpolar un polinomio por los puntos x_0, x_1, x_2, $x_3 = 4.00$ y $x_4 = 0.25$.

En ambos casos se planteará el problema directamente (identificando coeficientes), mediante el método de Lagrange, y mediante el método de Newton.

Además, se calculará el valor interpolado de $\ln(3)$ mediante los métodos de Lagrange y Newton, y se acotará su error respecto al valor exacto. Los resultados se darán en función de $c = \ln(2)$.

2.– Dados los puntos base $P_0 \equiv (0,1)$, $P_1 \equiv (1,2)$, $P_2 \equiv (2,4)$, y el producto escalar:

$$< f, g >= \sum_{i=0}^{2} f(x_i) g(x_i),$$

se pide:

- **a)** Generar la base de polinomios ortogonales asociada.
- **b)** Obtener, a partir de la base anterior, los polinomios de grados 0, 1 y 2 que aproximan a los puntos base en el sentido de mínimos cuadrados.
- **c)** En este caso, ¿sería correcto obtener las aproximaciones pedidas a partir de las ecuaciones normales, esto es, planteando directamente la minimización del error cuadrático, y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante? ¿Sería correcto si el número de puntos fuese mayor? ¿Y si además el grado del polinomio fuese superior? ¿Por qué?

3.– En el proyecto de una carretera se pretende mejorar el trazado en alzado. Sea x la distancia medida en planta sobre el eje de la carretera y sea $z(x)$ la cota correspondiente en cada punto. El trazado en alzado está formado normalmente por tramos rectos y parabólicos, enlazados de forma que la función $z(x)$ sea continua hasta la primera derivada. Para aumentar la sensación de comodidad de los conductores se propone la introducción de acuerdos de tipo polinómico entre los tramos rectos y los tramos parabólicos, de forma que la función resultante sea continua hasta la segunda derivada.

Sea x_1 el punto de enlace del acuerdo con el tramo recto y x_2 el punto de enlace del acuerdo con el tramo parabólico. Son datos del problema los siguientes:

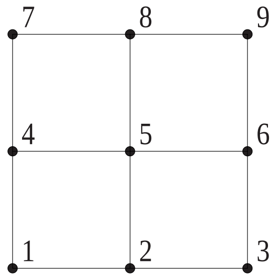
$$z_1 = z(x_1), \quad p_1 = z'(x_1), \quad z_2 = z(x_2), \quad p_2 = z'(x_2), \quad m_2 = z''(x_2).$$

Se pide:

- **a)** ¿Cuál es el grado mínimo del polinomio que se puede usar?
- **b)** Plantear directamente el sistema de ecuaciones que hay que resolver para obtener el polinomio de enlace.
- **c)** Sistematizar el cálculo del polinomio de enlace definiendo una base de polinomios adecuada, de forma que no sea necesario resolver un sistema de ecuaciones en cada caso.

4.– Determinar la cota superior del error de truncamiento al aproximar la función $\text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ mediante un polinomio de Lagrange de 3^{er} grado utilizando los puntos de interpolación óptimos de Tchebychev. ¿Qué valores de la función $\text{sen}(x)$ intervienen en la interpolación? ¿Es una interpolación MINI-MAX La aproximación obtenida? ¿Cuántos términos del desarrollo de Taylor serían precisos para obtener una aproximación a la función $\text{sen}(x)$ con menor error de truncamiento que el del polinomio interpolado? Obtener el polinomio, y el desarrollo de Taylor mencionados.

5.– Se desea interpolar una superficie que pase por los puntos $\{P_i \equiv (x_i, y_i, z_i),\ i = 1, 9\}$. Las proyecciones de los 9 puntos en el plano x–y corresponden a las posiciones de los 4 vértices, del centro y de los 4 centros de los lados de un cuadrado de lado 2 (ver figura). La ecuación de la superficie interpoladora, ha de ser un polinomio de la forma $z(x, y) = a_0 + a_{10}x + +a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \ldots$. ¿Cuál es el grado del polinomio mínimo necesario? Escribir la ecuación de la superficie en función de los valores $\{z_i\},\ i = 1, 9$.



6.– Para resolver un problema de ingeniería se precisa aproximar una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ mediante un spline $S(x) \in C^0$ de tipo poligonal a trozos (es decir una función continua lineal a trozos) definido por los puntos base $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,\ldots,n}$ de abscisas conocidas

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Las ordenadas $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ se determinarán de forma que se minimice la función

$$Q(y_0, \ldots, y_n) =< f - S, f - S >$$

con el producto escalar

$$< g, h >= \int_a^b g(x)h(x)dx.$$

Se pide:

a) ¿Qué criterio de aproximación se está utilizando?

b) Formular el spline en términos de una base de splines, es decir

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i B_i(x),$$

definiendo claramente los componentes $B_i(x)$ de la base.

c) Plantear y desarrollar el problema de minimización utilizando la expresión anterior y la notación de producto escalar $<, >$. Explicitar el sistema de ecuaciones lineales que es preciso resolver para obtener las ordenadas $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$.

d) ¿Cómo es, en general, la matriz de coeficientes del sistema? ¿Cómo es, en particular, la matriz de coeficientes del sistema cuando las abscisas son equiespaciadas?.

e) ¿Cuál es el método más conveniente para resolver este sistema? ¿Por qué?

f) Aproximar la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$ utilizando 3 puntos ($n = 2$) equiespaciados. Comentar los resultados.

7.– Se desea realizar un programa de dibujo de deformadas de vigas sometidas a flexión pura; se contemplan sólo cargas puntuales en puntos cualesquiera. Los diferentes casos que se estudian son 1) viga biapoyada, 2) viga biempotrada, y 3) viga empotrada apoyada (o apoyada empotrada). Se pide:

a) Para realizar la interpolación se debe obtener del programa de cálculo las flechas en diversas secciones no equiespaciadas. ¿Qué secciones son las más adecuadas? ¿Por qué?

b) Exponer justificadamente qué interpolación resulta más conveniente.

c) ¿Se realizaría exactamente la misma interpolación para las diferentes tipologías? Si no es así ¿Cómo variaría en cada caso?

8.– Un instrumento mide en los instantes $\{t_i\}_{i=0,n}$ una cierta magnitud que varía con el tiempo $z(t)$, obteniendo los valores $\{y_i \approx z(t_i)\}_{i=0,n}$. Los valores medidos están afectados de errores aleatorios relativamente grandes, por lo que al representar gráficamente los puntos $\{(t_i, y_i)\}_{i=0,n}$ se observa una gran dispersión respecto a su tendencia aparente. Se pretende aplicar una técnica de "smoothing" que permita obtener nuevos valores $\{(t_i, \eta_i)\}_{i=0,n}$ suavizados, de forma que los valores η_i minimicen la función:

$$Q(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{i=0}^{n} w_i (y_i - \eta_i)^2 + \sum_{i=0}^{n-3} \widehat{w}_i \Big(\eta[t_{i+3}, t_{i+2}, t_{i+1}, t_i]\Big)^2$$

para unos valores arbitrariamente elegidos de los factores de ponderación $\{w_i\}_{i=0,n}$ y $\{\widehat{w}_i\}_{i=0,n}$.

Se pide:

a) Plantear el problema general de obtener los valores suavizados.

b) Desarrollar completamente el planteamiento para el caso en que los valores t_i son equiespaciados y se utilizan los mismos factores de ponderación para todos los puntos ($w_i = \lambda, \widehat{w}_i = \mu, \forall i$).

c) Explicitar el sistema de ecuaciones que se obtiene, y explicar razonadamente qué método se considera más conveniente para resolverlo.

9.– Se desea interpolar una función $S(x) \in C^2$ por los puntos base $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,\ldots,3}$ equiespaciados horizontalmente ($x_i = x_0 + ih$). Además, las derivadas de la función interpoladora en los puntos intermedios deben adoptar unos valores conocidos p_1 y p_2, esto es

$$\left.\frac{dS(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = p_1, \qquad \left.\frac{dS(x)}{dx}\right|_{x=x_2} = p_2.$$

Se valoran dos alternativas:

I) interpolar un polinomio de grado suficientemente alto, y

II) interpolar un spline cúbico.

Se pide:

a) Plantear la obtención de la función interpoladora en ambos casos.

b) Obtener la expresión de la función interpoladora en el segundo caso en función de los puntos base y de los valores de las derivadas p_1 y p_2.

c) Determinar para qué valores de los datos p_1 y p_2, el spline interpolado es la más suave de todas las posibles interpolaciones que verifican los requisitos exigidos. Se entiende que una función es tanto más suave cuanto menor es el valor de la integral:

$$H = \int_{x_0}^{x_3} \left[S''(x)\right]^2 dx$$

10.– **[PROBLEMA QUE SE ENTREGARÁ RESUELTO]**

En un estudio sobre fenómenos climáticos adversos en zonas portuarias se propone el análisis de la altura de ola máxima anual a lo largo del tiempo registrada en los últimos años de cara a intentar predecir una posible evolución futura. Para ello se encarga a un ingeniero que realice un estudio de los datos disponibles en la actualidad y que plantee un modelo adecuado para intentar estimar el comportamiento en los próximos años de la altura de ola máxima anual. Para el estudio de datos previos disponibles y para validar el modelo de análisis el ingeniero accederá a la base de datos de Puertos del Estado en España a través del portal <https://portus.puertos.es> y buscará los datos necesarios (datos históricos) que le proporcione la estación de medida (boya) que se le indique según la tabla adjunta. La información necesaria se extraerá de las series/tablas de datos de altura de ola máxima mensual desde que haya registros anuales completos.

Específicamente se pide:

a) Buscar los datos históricos en la base de datos de Puertos del Estado y tomar como conjunto de datos el valor máximo anual de altura de ola registrado en la estación de información indicada (boya). Para ello se accederá a los datos históricos de oleaje, se elegirá la estación de información (boya) y se utilizarán los datos de altura máxima mensual para deducir el máximo anual. Se tomarán sólo valores de altura máxima anual cuando haya registro de todos los meses del año para evitar introducir sesgos en los datos (excepto que sólo falten meses de verano, que no se consideran relevantes a estos efectos). La boya a analizar será la indicada en la tabla adjunta.

b) Con los datos de máximos anuales de altura de ola hasta 2018 (incluido) calcular la recta de regresión y analizar gráfica y matemáticamente la tendencia que muestran los datos a futuro. Comparar el resultado que arroja la recta de regresión frente al máximo anual realmente registrado en 2023. (Si el dato de 2023 no está disponible utilícese el de 2022.)

c) Utilizar el programa Fortran de aproximación por mínimos cuadrados con polinomios ortogonales (mcpo.f) de la web de la asignatura para realizar ajustes por mínimos cuadrados de los datos del apartado anterior con polinomios de orden creciente. Analizar la evolución del error cuadrático medio a medida que se aumenta el orden del polinomio de ajuste e indicar si hay algún orden de polinomio para el que el error se reduzca de forma drástica y a partir del cual no merezca la pena seguir incrementando el orden. Analizar las previsiones para 2023 que arroja el modelo en función del orden del polinomio en comparación con el valor real medido.

d) A partir de las conclusiones extraídas de los resultados del apartado c) analizar la tendencia de la altura de ola máxima anual a medida que el orden del polinomio de ajuste crece. Interpretar los resultados gráfica y matemáticamente. ¿Podemos dar una aproximación fiable de la altura de ola máxima anual para el año 2040? Calcular justificadamente una estimación de la altura máxima anual de ola esperable para el año 2040

e) [OPCIONAL] El análisis realizado en el apartado c) se puede aplicar también a otras magnitudes relevantes como por ejemplo el nivel medio del mar. Estudiar la evolución del nivel medio del mar mediante ajuste por mínimos cuadrados adoptando como datos los valores medios mensuales del nivel del mar que se pueden obtener de la misma página web de Puertos del Estado. Para ello se accederá a los datos históricos, se elegirá la boya de información y se buscarán los datos mensuales de nivel del mar. Analizar la tendencia del nivel medio del mar de los últimos años.

Nombre de la boya	Iniciales del estudiante
Boya de Gijón	C. D., F.
Boya de Cabo de Peñas	C. G., S. J.
Boya de Estaca de Bares	C. P., L. M.
Boya de Langosteira I y II	D. M., W. M.
Boya de Vilano-Sisargas	D. E., J.
Boya de Cabo Silleiro	de E. M., F
Boya de Golfo de Cádiz	F. P., J.
Boya Costera de Bilbao II	F. R., R.
Boya de Tarifa	F. L. S.
Boya de Algeciras-Punta Carnero	F. F., A.
Boya de Málaga	G. G., M.
Boya de Cabo de Gata	H. R.-L., P.
Boya de Cabo de Palos	L. B., R.
Boya de Valencia	L. G.-V., J.
Boya de Tarragona	M. O., J. M.
Boya de Barcelona II	M. S., E. M.
Boya de Cabo Begur	N. L., A.
Boya de Dragonera	N. B., D.
Boya de Mahón	O. D., E. B.
Boya de Ceuta	P. L., L. E.
Boya de Bilbao-Vizcaya	P. O., P.
Boya de Tarragona	P. D., R.
Boya de Las Palmas Este	R. F., J.
Boya de Gran Canaria	R. P., C. P.
Boya de Santa Cruz de Tenerife	R. S., L.
Boya de Tenerife Sur	V. M., J.
Boya Costera de Bilbao II	V. I., F. J.
Boya de Málaga	V. P., T.